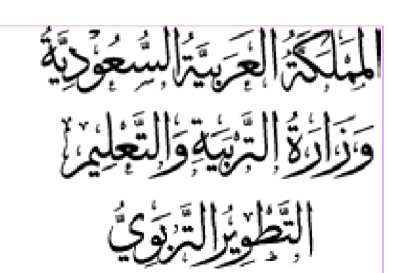




الرِّياضيَّات

للصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

(علمي)

طبعة ١٤٢٨هـ - ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م - ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثاني الثانـوي : الفصل الدراسي الثاني - الرياض
٢٨٨ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٤ - ١٩٦ - ٤٨ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
١ ـ الرياضيات ـ كتب دراسيـة
٢ ـ السعودية - التعليم الثانوي ـ كتب دراسية
أ ـ العنوان
ديوي ٧١٢، ٥١٠ ‏ ‏ ‏ ٧٤٥٨ / ١٤٢٦

رقم الإيــداع : ٧٤٥٨/ ١٤٢٦
ردمك : ٤ - ١٩٦ - ٤٨ - ٩٩٦٠ (مجموعة)

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فحافظي عليه
واجعلي نظافتـه تشهـد على حسـن سلوكك معـه...

إذا لم تحتفظي بهذا الكتاب في مكتبتك الخاصـة في آخـر
العـام للاستفادة فاجعلي مكتبة مدرستك تحتفظ بـه...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa


بسم الله الرحمن الرحيم

الفهـــــرس

الأعداد المركبة

٦-١ الحاجة إلى توسيع نظام الأعداد الحقيقية

سبق أن درسنا في أبواب سابقة توسيع النظام العددي من الأعداد الطبيعية ط إلى الأعداد الصحيحة ص~ إلى الأعداد النسبية ن ، وأخيراً إلى الأعداد الحقيقية ح. ولعل الدافع الأساسي لهذا التوسيع هو الحاجة إلى حل مزيد من المعادلات.

فعلى سبيل المثال :

$س + ٥ = ٣$ ليس لها حل في ط ، ولكن لها حل في ص~ .

$٢ س = ٧$ ليس لها حل في ص~ ، ولكن لها حل في ن .

$س^٢ = ٢$ ليس لها حل في ن ، ولكن لها حل في ح .

وهكذا نلاحظ أن النظام ح يمتاز على الأنظمة السابقة بأنه يسمح بحل عدد أكبر من المعادلات . وهنا يحق لنا أن نتساءل : ألا توجد معادلات ليس لها حل في ح ؟ أو بعبارة أخرى : ألا نحتاج إلى توسيع النظام ح ؟

والإجابة هي : بلى ، فالمعادلة

$س^٢ + ١ =$ صفراً ..... (١)

من أبسط معادلات الدرجة الثانية ، ولكن لا يوجد لها حل في ح ، لأنه لا يوجد عدد حقيقي س يكون مربعه − ١ . وهذا يقودنا بطبيعة الحال الى البحث عن نظام أوسع من ح يحتوي حل المعادلة (١) .

٦-٢ حقل الأعداد المركبة

عندما نتحدث هنا عن نظام الأعداد الحقيقية ، فإننا في حقيقة الامر لا نعني مجموعة الأعداد الحقيقية ح فحسب ، وإنما نعني أن هذه المجموعة مزودة بعمليتي الجمع والضرب المعرفتين عليها ،

والخواص المعروفة لهاتين العمليتين ، أو مايسمى بحقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ۰).

وقد سبق للطالبة أن اطلعت على تعريف الحقل في كتاب الصف الأول الثانوي في الباب السادس .

المطلوب الآن هو حقل آخر ($\tilde{س}$ ، ⊕ ، ⊙) اوسع من (ح ، + ، ۰) يحتوي حل المعادلة (١) . وبأسلوب أدق ، فإن المطلوب في الحقل الجديد أن يفي بهذين الشرطين :

١) ح ⊂ $\tilde{س}$

٢) يوجد عنصر س ∈ $\tilde{س}$ يحقق المعادلة (١)

تعريف (٦ – ١)

تسمى المجموعة ك = { (س ، ص) : س، ص ∈ ح } بمجموعة الأعداد المركبة ، ويعرف التساوي بين عددين مركبين على النحو الآتي :

(س$_1$ ، ص$_1$) = (س$_2$ ، ص$_2$) ⟺ س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$.

تعريف (٦ – ٢)

تعرف عمليتا الجمع والضرب على مجموعة الأعداد المركبة على النحو الآتي :

(س$_1$ ، ص$_1$) + (س$_2$ ، ص$_2$) = (س$_1$ + س$_2$ ، ص$_1$ + ص$_2$)

(س$_1$ ، ص$_1$) ۰ (س$_2$ ، ص$_2$) = (س$_1$ س$_2$ - ص$_1$ ص$_2$ ، س$_1$ ص$_2$ + س$_2$ص$_1$)

لأي (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) ∈ ك

والآن بعد أن عرفنا المجموعة ك والعمليتين + ، · ، بقي أن نتأكد من أن النظام (ك ، + ، ·) يفي بشروط الحقل .

نظرية (٦ – ١)

النظام (ك ، + ، ·) حقل .

البرهان :

بالرجوع إلى التعريف (٦ – ١) ، سنتأكد من توافر الخواص المطلوبة في الحقل .

١) الانغلاق :

لكل $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢) \in$ ك يكون :

$$(س_١ ، ص_١) + (س_٢ ، ص_٢) = (س_١ + س_٢ ، ص_١ + ص_٢)$$

من التعريف (٦ – ٢)

$$(س_١ ، ص_١) \cdot (س_٢ ، ص_٢) = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢ ، س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)$$

من التعريف (٦ – ٢)

وحيث أن $س_١ + س_٢$ ، $ص_١ + ص_٢$ ، $س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢$ ،
$س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١$ جميعها أعداد حقيقية ، حسب خواص الأعداد الحقيقية
إذاً $(س_١ ، ص_١) + (س_٢ ، ص_٢) \in$ ك وكذلك $(س_١ ، ص_١) \cdot$
$(س_٢ ، ص_٢) \in$ ك من التعريف (٦ – ٢) .

٢) الابدال :

(س$_1$ ، ص$_1$) + (س$_2$ ، ص$_2$) = (س$_1$ + س$_2$ ، ص$_1$ + ص$_2$)

من التعريف (٦ – ٢)

= (س$_2$ + س$_1$ ، ص$_2$ + ص$_1$)

وفق خاصة الابدال في الجمع في الحقل

(ح ، + ، ·) .

= (س$_2$ ، ص$_2$) + (س$_1$ ، ص$_1$)

من التعريف (٦ – ٢)

وبطريقة مشابهة يمكن إثبات أن (س$_1$ ، ص$_1$) · (س$_2$ ، ص$_2$) = (س$_2$ ، ص$_2$) · (س$_1$ ، ص$_1$) ، اعتماداً على خاصة الإبدال في الضرب في الحقل (ح ، + ، ·) .

٣) الخاصة التجميعية :

اعتماداً على الخاصة التجميعية لعملية الجمع في (ح ، + ، ·) نحصل على :

[(س$_1$ ، ص$_1$) + (س$_2$ ، ص$_2$)] + (س$_3$ ، ص$_3$)

= (س$_1$ + س$_2$ ، ص$_1$ + ص$_2$) + (س$_3$ ، ص$_3$)

= [(س$_1$ + س$_2$) + س$_3$ ، (ص$_1$ + ص$_2$) + ص$_3$]

= [س$_1$ + (س$_2$ + س$_3$) ، ص$_1$ + (ص$_2$ + ص$_3$)]

= (س$_1$ ، ص$_1$) + (س$_2$ + س$_3$ ، ص$_2$ + ص$_3$)

= (س$_1$ ، ص$_1$) + [(س$_2$ ، ص$_2$) + (س$_3$ ، ص$_3$)]

وبنفس الطريقة نحصل على :

[(س$_1$ ، ص$_1$) · (س$_2$ ، ص$_2$)] · (س$_3$ ، ص$_3$) = (س$_1$ ، ص$_1$) · [(س$_2$ ، ص$_2$) · (س$_3$ ، ص$_3$)]

٤) التوزيع :

على الطالبة إثبات أن :

(س$_1$ ، ص$_1$) · [(س$_2$ ، ص$_2$) + (س$_3$ ، ص$_3$)] = (س$_1$ ، ص$_1$) ·

(س$_2$ ، ص$_2$) + (س$_1$ ، ص$_1$) · (س$_3$ ، ص$_3$) وذلك اعتماداً على خاصة

التوزيع في (ح ، + ، ·) .

٥) العنصران المحايدان بالنسبة للجمع والضرب :

إذا كان (أ ، ب) هو عنصر الجمع المحايد في ك فلكل (س ، ص) ∈ ك

(س ، ص) + (أ ، ب) = (س + أ ، ص + ب) من التعريف (٦ – ٢).

= (س ، ص) خاصة عنصر الجمع المحايد

⟸ س + أ = س ، ص + ب = ص من التعريف (٦ – ٢) .

⟸ أ = صفراً ، ب = صفراً

⟸ (٠ ، ٠) هو عنصر الجمع المحايد في حقل الأعداد المركبة .

وبطريقة مماثلة ، يمكن للطالبة استنتاج أن (١ ، ٠) هو عنصر الضرب المحايد في الأعداد المركبة .

٦) وجود المعكوس الجمعي :

إذا كان (س ، ص) أي عنصر في ك ، (أ ، ب) معكوسه الجمعي ، فإن

(س ، ص) + (أ ، ب) = (س + أ ، ص + ب) من التعريف (٦ – ٢) .

= (٠ ، ٠) خاصة المعكوس الجمعي

⟸ س + أ = ٠ ، ص + ب = ٠ من التعريف (٦ – ٢) .

⟸ أ = - س ، ب = - ص

فنستنتج أن (- س ، - ص) هو المعكوس الجمعي للعدد المركب (س ، ص) ، وهو عنصر في ك .

وجود المعكوس الضربي :

إذا كان (أ ، ب) هو المعكوس الضربي للعدد (س ، ص) ≠ (٠ ، ٠) فإن

(س ، ص) · (أ ، ب) = (س أ − ص ب ، س ب + ص أ) من التعريف (٦ − ٢) .

= (١ ، ٠) وفق خاصة المعكوس الضربي

⟸ س أ − ص ب = ١ ، س ب + ص أ = ٠

بضرب المعادلة الأولى في س والثانية في ص ثم الجمع نحصل على :

س² أ + ص² أ = س . وبما ان س² + ص² ≠ ٠ (لماذا ؟) ، فــإن :

أ = س / (س² + ص²)

وبضــرب المعــادلة الأولى في ص والثانية في س ثم الطـرح نحــصل على :

س² ب + ص² ب = - ص . وبما أن س² + ص² ≠ ٠ فإن :

ب = - ص / (س² + ص²)

⟸ المعكوس الضربي للعدد (س ، ص) هو (س / (س² + ص²) ، - ص / (س² + ص²)) ∈ ك .

وبذلك يتم برهان النظرية (٦ − ١) .

إذا أشرنا لمعكوسي العدد (س ، ص) الجمعي والضربي بالرمزين :

$-(س ، ص)$ ، $(س ، ص)^{-1}$ على الترتيب ، فقد توصلنا فيما سبق إلى أن

$$-(س ، ص) = (-س ، -ص)$$

$$(س ، ص)^{-1} = \left(\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} ، \frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}}\right)$$

وهذا يقودنا الى التعريف التالي لعمليتي الطرح والقسمة في ك .

تعريف (٦ – ٣)

$$(س_{١} ، ص_{١}) - (س_{٢} ، ص_{٢}) = (س_{١} ، ص_{١}) + (-س_{٢} ، -ص_{٢})$$

$$\frac{(س_{١} ، ص_{١})}{(س_{٢} ، ص_{٢})} = (س_{١} ، ص_{١}) \cdot (س_{٢} ، ص_{٢})^{-١}$$ حيث $(س_{٢} ، ص_{٢}) \neq (٠ ، ٠)$

فينتج عن ذلك أن :

$$(س_{١} ، ص_{١}) - (س_{٢} ، ص_{٢}) = (س_{١} - س_{٢} ، ص_{١} - ص_{٢})$$

$$\frac{(س_{١} ، ص_{١})}{(س_{٢} ، ص_{٢})} = (س_{١} ، ص_{١}) \cdot \left(\frac{س_{٢}}{س_{٢}^{٢} + ص_{٢}^{٢}} ، \frac{-ص_{٢}}{س_{٢}^{٢} + ص_{٢}^{٢}}\right)$$

$$= \left(\frac{ص_{١} ص_{٢} + س_{١} س_{٢}}{س_{٢}^{٢} + ص_{٢}^{٢}} ، \frac{س_{١} ص_{٢} - ص_{١} س_{٢}}{س_{٢}^{٢} + ص_{٢}^{٢}}\right)$$

مثال (٦ – ١)

ليكن $ع_١$ = (١ ، ٢) ، $ع_٢$ = (٣ ، - ١) . أوجدي $ع_١$ + $ع_٢$ ، $ع_١^{-١}$ ،

$ع_١$ · $ع_٢$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$.

الحـــــل :

$ع_١$ + $ع_٢$ = (١ ، ٢) + (٣ ، -١)

= (١ + ٣ ، ٢ – ١) من التعريف (٦ – ٢)

= (٤ ، ١)

$ع_١^{-١}$ = (١ ، ٢)$^{-١}$

= $\left(\frac{١}{١^٢ + ٢^٢} ، \frac{-٢}{١^٢ + ٢^٢}\right)$ انظري المعكوس الضربي في برهان النظرية (٦ – ١)

= $\left(\frac{١}{٥} ، -\frac{٢}{٥}\right)$

$ع_١$ · $ع_٢$ = (١ ، ٢) · (٣ ، - ١)

= (١ × ٣ – ٢ × (- ١) ، ١ × (- ١) + ٢ × ٣) من التعريف (٦ – ٢) .

= (٣ + ٢ ، -١ + ٦)

= (٥ ، ٥)

$\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{(١ ، ٢)}{(٣ ، -١)}$

$$= (١ ، ٢) \cdot (٣ ، -١)^{-١}$$ بالتعريف (٦ – ٣)

$$= (١ ، ٢) \cdot \left(\frac{٣}{١+٩} ، \frac{-(-١)}{١+٩} \right)$$

$$= (١ ، ٢) \cdot \left(\frac{٣}{١٠} ، \frac{١}{١٠} \right)$$

$$= \left(١ \times \frac{٣}{١٠} - ٢ \times \frac{١}{١٠} ، ١ \times \frac{١}{١٠} + ٢ \times \frac{٣}{١٠} \right)$$ من التعريف (٦ – ٢) .

$$= \left(\frac{١}{١٠} ، \frac{٧}{١٠} \right)$$

على أساس تعريف الجمع والضرب في ك باستطاعتنا كتابة أي عدد مركب على الصورة التالية :

$$(س ، ص) = (س ، ٠) + (٠ ، ص)$$

$$= (س ، ٠) + (ص ، ٠) \cdot (٠ ، ١) \qquad (٢)$$

حيث تتمتع (س ، ٠) ، (ص ، ٠) بالخواص التالية :

$$(س ، ٠) \pm (ص ، ٠) = (س \pm ص ، ٠)$$

$$(س ، ٠) \cdot (ص ، ٠) = (س ص ، ٠)$$

وإذا كان ص ≠ ٠ فإن :

$$\frac{(س ، ٠)}{(ص ، ٠)} = \left(\frac{س ص}{ص^٢} ، ٠ \right) = \left(\frac{س}{ص} ، ٠ \right)$$

نلاحظ مما تقدم أن مجموعة الأعداد المركبة من الشكل (س ، ٠) والتي يوجد تقابل

واضح بينها وبين المجموعة ح ، تتمتع بالنســبة لعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة المعرفة على ، بخواص المجموعة ح بالنسبة لعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة المعرفة على ح . ولذلك نعتبر (س ، ٠) صورة أخرى للعدد الحقيقي س . أى أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة مكونة من العناصر (س ، ٠)

اما العدد (٠ ، ١) فتتوفر له الخاصة التالية :

(٠ ، ١)^{٢} = (٠ ، ١) ・ (٠ ، ١)

= (-١ ، ٠)

أي ان مربـع العـدد المركـب (٠ ، ١) هـو العـدد الحقيقـي -١ . فـإذا رمزنا للعـدد (٠ ، ١) بالرمـز ت ، فإنـه يكـون ت^{٢} = -١ ، الأمـر الـذى أوجـد مبـرراً لكتابة المساواة ت = $\sqrt{-١}$.

فتكون ت = (٠ ، ١) هي حل المعادلة (١) .

والآن يمكننا إعادة كتابة المعادلة (٢) على الصورة :

(س ، ص) = س + ص ت .

سنسـتخدم الصـورة س + ص ت لتمثيـل العـدد المركـب (س ، ص) ، لأنهـا تبسـط العمليات الجبرية ، لا سـيما الضرب والقسـمة ، حيث تجرى هذه العمليات بالطريقـة المعتـادة فـي (ح ، + ، ٠) مـع الأخـذ بالاعتبـار أن ت^{٢} = -١.

لاحظي الأمثلة التالية :

١) ($س_{١}$ + $ص_{١}$ ت) + ($س_{٢}$ + $ص_{٢}$ ت) = ($س_{١}$ + $س_{٢}$) + ($ص_{١}$ + $ص_{٢}$) ت

٢) $(س_{١} + ص_{١}\,ت) \cdot (س_{٢} + ص_{٢}\,ت) = س_{١}\,س_{٢} + س_{١}\,ص_{٢}\,ت$

$+ ص_{١}\,س_{٢}\,ت + ص_{١}\,ص_{٢}\,ت^{٢}$

$= (س_{١}\,س_{٢} - ص_{١}\,ص_{٢}) + (س_{١}\,ص_{٢} + ص_{١}\,س_{٢})\,ت$

وهذه النتيجة تتفق مع التعريف (٦ – ٢) .

٣) لكي نجري عملية القسمة $\dfrac{س_{١} + ص_{١}\,ت}{س_{٢} + ص_{٢}\,ت}$ ، نحتاج إلى تحويل المقام إلى عدد حقيقي ، وهذا يتم بالضرب في $س_{٢} - ص_{٢}\,ت$:

$$\frac{س_{١} + ص_{١}\,ت}{س_{٢} + ص_{٢}\,ت} \cdot \frac{س_{٢} - ص_{٢}\,ت}{س_{٢} - ص_{٢}\,ت} =$$

$$\frac{س_{١}\,س_{٢} - س_{١}\,ص_{٢}\,ت + ص_{١}\,س_{٢}\,ت - ص_{١}\,ص_{٢}\,ت^{٢}}{س_{٢}^{٢} - س_{٢}\,ص_{٢}\,ت + ص_{٢}\,س_{٢}\,ت - ص_{٢}^{٢}\,ت^{٢}}$$

$$= \frac{س_{١}\,س_{٢} + ص_{١}\,ص_{٢}}{س_{٢}^{٢} + ص_{٢}^{٢}} + \frac{ص_{١}\,س_{٢} - س_{١}\,ص_{٢}}{س_{٢}^{٢} + ص_{٢}^{٢}}\,ت$$

وهذه النتيجة تتفق مع التعريف (٦ – ٣) .

والحقيقة أن كلاً من التعريفين (٦ – ٢) ، (٦ – ٣) قد صمم لكي يعطي النتائج المتوقعة من تطبيق العمليات الجبرية على المقدار $س + ص\,ت$ ، حيث $س ، ص \in ح$ ، ولكن $ت \notin ح$ ، $ت^{٢} = -١ \in ح$.

يسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب $ع = س + ص\,ت$ ، ص الجزء التخيلي . لاحظ أن كلاً من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي هو عدد حقيقي .

وعندما تكون ص = صفراً ، يصبح ع عدداً حقيقياً ، أما إذا كانت س = صفراً فإن ع تتحول إلى عدد تخيلي بحت (أو صرف) .

مثال (٦ – ٢)

إذا كان $ع_١$ = ٣ – ٤ ت

$ع_٢$ = ٧ + ت

$ع_٣$ = ٣ ت

فإن $ع_١ + ع_٢$ = (٣ – ٤ ت) +(٧ + ت)

= (٣ + ٧) + (- ٤ + ١) ت

= ١٠ – ٣ ت

$ع_١ + ع_٢ - ع_٣$ = (١٠ – ٣ ت) – ٣ ت

= ١٠ + (- ٣ – ٣) ت

= ١٠ – ٦ ت

$ع_١ \cdot ع_٢$ = (٣ – ٤ ت) (٧ + ت)

= ٢١ + ٣ ت – ٢٨ ت – ٤ $ت^٢$

= (٢١ + ٤) + (٣ – ٢٨) ت

= ٢٥ – ٢٥ ت

$ع_١ \cdot ع_٢ \cdot ع_٣$ = $(ع_١ \cdot ع_٢) \cdot ع_٣$ = (٢٥ – ٢٥ ت) (٣ت)

= ٧٥ ت – ٧٥ $ت^٢$

= ٧٥ + ٧٥ ت

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٣ - ٤ ت}{٧ + ت}$$

$$= \frac{٣ - ٤ ت}{٧ + ت} \cdot \frac{٧ - ت}{٧ - ت}$$

$$= \frac{٢١ - ٣ ت - ٢٨ ت + ٤ ت^٢}{٤٩ - ٧ ت + ٧ ت - ت^٢}$$

$$= \frac{١٧ - ٣١ ت}{٥٠}$$

$$= \frac{١٧}{٥٠} - \frac{٣١}{٥٠} ت$$

لاحظي أن عملية القسمة $\frac{س_1 + ص_1 ت}{س_2 + ص_2 ت}$ تتم بتحويل المقام $س_2 + ص_2 ت$

إلى عدد حقيقي بضربه في $س_2 - ص_2 ت$.

تعريف (٦ – ٤)

لأي عدد مركب ع = س + ص ت يسمى العدد المركب

$\bar{ع}$ = س – ص ت مرافق ع .

وللأعداد المترافقة خواص هامة ، من أهمها :

$ع \cdot \bar{ع}$ = (س + ص ت)· (س – ص ت)

$= س^2 + ص^2$

= عدداً حقيقياً

وهذا يفيدنا عند إجراء عملية القسمة

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ع_1}{ع_2} \cdot \frac{\bar{ع}_2}{\bar{ع}_2}$$

$$= \frac{ع_1 \bar{ع}_2}{ع_2 \bar{ع}_2}$$

وبذلك تتحول القسمة على العدد المركب $ع_2$ إلى القسمة على العدد الحقيقي

$ع_2 \bar{ع}_2$ ، كما شاهدنا في المثال السابق .

كما نلاحظ أن :

$$ع^{-1} = \frac{1}{ع}$$

$$= \frac{\bar{ع}}{ع \bar{ع}}$$

فمثلاً :

$$(1 + 2ت)^{-1} = \frac{1}{1 + 2ت}$$

$$= \frac{1 - 2ت}{(1 + 2ت)(1 - 2ت)}$$

$$= \frac{1 - 2ت}{1 + 4}$$

$$= \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad ت$$

وفي التمارين التالية سنستنتج بعض الخواص الأخرى للأعداد المترافقة .

تمارين (٦ – ١)

(١) أوجدي :

(أ) (٥ ، ٢) + (٥ ، -٢)

(ب) (٥ ، ٢) . (٥ ، -٢)

(حـ) (١ ، ٠) + (-١ ، $\sqrt{٣}$) + (-١ ، -$\sqrt{٣}$)

(ء) (-١ ، $\sqrt{٣}$) . (-١ ، -$\sqrt{٣}$)

(٢) بيني لماذا لا يصلح التعريف التالي للعمليات على الأعداد المركبة :

(أ ، ب) + (حـ ، ء) = (أ + حـ ، ب + ء)

(أ ، ب) . (حـ ، ء) = (أحـ + ب ء ، أ ء + ب حـ)

تنبيه : بيّني أياً من خواص الحقل لا يحققها التعريف .

(٣) عبري عن كل ما يلي بالصورة أ + ب ت :

(أ) ١   (ب) صفر

(حـ) ٥   (ء) -٣

(هـ) ت   (و) -ت

(ز) ٥ ت   (ح) $(٣ - ٢ت)^{-١}$

(ط) $\overline{٧ + ٥ت}$ (ي) $\overline{٧ - ٥ت}$

(ك) $\overline{\overline{٧ + ٥ت}}$ (ل) $\overline{٣ت}$

(٤) ضعي في أبسط صورة :

(أ) ت^{٥}

(ب) ت^{٦}

(حـ) ت^{٧}

(ى) ت^{٨}

(هـ) ت^{١٢٤}

(و) ت^{٢ن} ، حيث ن ∈ ط

(ز) ت$^{٤ن+١}$ ، حيث ن ∈ ط

(٥) إذا كانت س~ = {١ ، - ١ ، ت ، - ت} فأثبتي أن (س~ ، ×) زمرة .

(٦) أوجدي :

(أ) (٢ + ٣ ت) + (١٢ + ٢ ت)

(ب) (١٧ + ت) + (١٢ − ٥ ت)

(حـ) (أ + ب ت) + (أ − ب ت) حيث أ ، ب ∈ ح

(ى) (س + ص ت) + (٠ + ٠ ت) حيث س ، ص ∈ ح

(هـ) (س + ص ت) - (س − ص ت) حيث س ، ص ∈ ح

(٧) أوجدي حاصل الضرب في كل مايلي :

(أ) (١٠ + ٣ ت) · (٥ + ٦ ت)

(ب) (٢ − ٣ ت) · (٣ + ٢ ت)

(حـ) ٥ · (٣ + ت)

(ى) - ٢ ت · (٧ − ٣ ت)

(هـ) $(٥ + ٣ ت)^{٢}$

(و) (٥ + ٣ ت) (٥ – ٣ ت)

(ز) $(أ + ب ت)^{٢}$ ، أ ، ب ∈ ح

(ح) (أ + ب ت) (أ – ب ت) ، أ ، ب ∈ ح

(٨) اختصري إلى الصورة أ + ب ت :

(أ) (٨ + ١٠ ت) - (٢ + ت)

(ز) $\frac{٣ + ٤ ت}{٣ - ٤ ت}$

(ب) (١١ + ٧ ت) - (٣ - ت)

(حـ) ($\sqrt{٢}$ + ت) - ($\sqrt{٢}$ – ت) + ($\sqrt{٣}$ – ٢ ت)

(ح) $\frac{س - ص ت}{س + ص ت}$ س ، ص ∈ ح ٠

(ى) $\frac{١}{٢ + ت}$

(ط) $\frac{(٧ + ٥ت)(٣ - ٤ ت)}{٣ + ٤ت}$

(هـ) $\frac{ت}{١ + ت}$

(ى) $\frac{٢ + ت}{١ - ت} + \frac{٣ + ت}{١ + ت}$

(و) $\frac{١٢ + ت}{ت}$

(ك) $\frac{٥ + ٢ت}{٣ - ٤ت} - \frac{ت}{٢ + ٣ت}$

(٩) إذا كانت ع = س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح فتحققي من أن :

(أ) ع + $\overline{ع}$ = ٢ س

(حـ) ع $\overline{ع}$ = $س^{٢}$ + $ص^{٢}$

(ب) ع – $\overline{ع}$ = ٢ ص ت

(ى) $\overline{\overline{ع}}$ = ع

(١٠) ماهو العدد المركب ع الذي يساوي معكوسه الجمعي - ع ؟

ماهو العدد المركب الذي يساوي معكوسه الضربي ؟

٦-٣ الجذور وَحل المعَادَلات

كان الدافع إلى توسيع الحقل (ح ، + ، ·) إلى (ك ، + ، ·) هو الحصول على حل المعادلة $س^٢ + ١ = $ صفراً

ولو كانت هذه النتيجة هي الثمرة الوحيدة لهذا التوسيع ، لما استحقت منا الأعداد المركبة كل هذا الاهتمام . ولكن الحقيقة أن حقل الأعداد المركبة يفتح لنا آفاقا جديدة في حل المعادلات ، ويسد ثغرات كثيرة كانت موجودة في هذا الموضوع . ولو قدر للطالبة أن تتابع دراسة هذا الموضوع ، فسوف تكتشف أن التحليل المركب ، أي التحليل الرياضي في حقل الأعداد المركبة ، من المواضيع الحية ، التي اكتسبت درجة من التنسيق والترابط والكمال ، قلما تتوفر لغيرها من فروع الرياضيات . الذي يهمنا الآن هو حل المعادلات ، فلننظر إلى المثال التالي :

مثال (٦ – ٣)

أوجدي جذور المعادلة :

$$س^٢ - ٦ س + ١٣ = \text{صفراً}$$

الحـــــل :

باستخدام القانون (أو باكمال المربع على س) ، نحصل على :

$$س = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٥٢}}{٢}$$

$$= ٣ \pm \frac{١}{٢} \sqrt{- ١٦}$$

$$= ٣ \pm \frac{١}{٢} \sqrt{(١٦)(-١)}$$

$$= ٣ \pm \frac{١}{٢} \sqrt{١٦} \sqrt{-١}$$

$$= ٣ \pm ٢ ت$$

باعتبار أن $ت = \sqrt{-١}$

إذاً للمعادلة جذران هما ٣+٢ت ، ٣ - ٢ ت .

وباستطاعة الطالبة ان تتحقق من صحة النتيجة بالتعويض في المعادلة .

والمثال التالي تعميم لما سبق .

مثال (٦ – ٤)

أوجدي جذور معادلة الدرجة الثانية

$$أ س^٢ + ب س + جـ = صفراً \qquad (٣)$$

حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ $\neq$ صفراً

الحـــــل :

باستخدام القانون نحصل على

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

وهنا نميز بين ثلاث حالات ، تحددها إشارة المقدار $ب^٢ - ٤ أ جـ$.

الحالة الأولى : $ب^٢ - ٤ أ جـ > ٠$

في هذه الحالة يكون المعادلة جذران حقيقيان هما :

$$\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ} \quad ، \quad \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

الحالة الثانية $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$

للمعادلة في هذه الحالة جذر واحد حقيقي هو $\frac{-ب}{٢أ}$

الحالة الثالثة : $ب^٢ - ٤ أ جـ < ٠$

في هذه الحالة نكتب :

$$\sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ} = \sqrt{(٤ أ جـ - ب^٢)} \sqrt{-١}$$

$$= \sqrt{٤ أ جـ - ب^٢} \, ت$$

حيث $\sqrt{٤ أ جـ - ب^٢}$ عدد حقيقي لأن $٤ أ جـ - ب^٢ > ٠$.

فينتج عن ذلك أن للمعادلة (٣) جذرين مركبين هما :

$$\frac{-ب}{٢ أ} + \frac{\sqrt{٤ أ حـ - ب^٢}}{٢ أ} ت \quad ، \quad \frac{-ب}{٢ أ} - \frac{\sqrt{٤ أ حـ - ب^٢}}{٢ أ} ت$$

ملاحظات (٦ – ١)

(١) للمعادلة (٣) جذر واحد على الأقل أو جذران اثنان على الأكثر في ك .

(٢) جذرا المعادلة (٣) المركبان مترافقان .

(٣) للمعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ جذران تخيليان صرفان هما ± ت .

مثال (٦ – ٥)

أوجدي الجذور التربيعية للعدد ٨ + ٦ ت .

الحــــــل :

بفرض أن س + ص ت هي الصورة العامة للجذر التربيعي حيث س ، ص ∈ ح ينتج أن

$(س + ص ت)^٢ = ٨ + ٦ ت$

$س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت = ٨ + ٦ ت$

$\Longleftarrow س^٢ - ص^٢ = ٨ ، ٢ س ص = ٦$

نستنتج من المعادلة الثانية أن س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ ، وبتعويض

$ص = \frac{٣}{س}$ في المعادلة الأولى نجد :

$$س^{٢} - \left(\frac{٣}{س}\right)^{٢} = ٨$$

بالضـــــرب في $س^{٢}$:

$$(س^{٢})^{٢} - ٨\,س^{٢} - ٩ = ٠$$

$$(س^{٢} - ٩)\,(س^{٢} + ١) = ٠$$

$$\Longleftarrow \quad س^{٢} - ٩ = ٠ \quad ، \quad أو\ س^{٢} + ١ = ٠$$

$$\Longleftarrow \quad س = \pm ٣ \quad ، \quad أو\ س = \pm ت$$

ولكن بما أن س عدد حقيقي نستبعد النتيجة الثانية .

في حالة س = ٣ تكون ص = $\frac{٣}{س}$ = ١

وفي حالة س = - ٣ تكون ص = - ١

إذاً للعدد ٨ + ٦ ت جذران تربيعيان هما ± (٣ + ت) .

مثال (٦ – ٦)

أوجدي الجذور التكعيبية للعدد ١ .

الحـــــل :

بفرض أن ع = س + ص ت هي الصورة العامة للجذر التكعيبي ، نحصل على $ع^{٣} = ١$

ع^{٣} − ١ = صفراً .

إذاً (ع − ١) (ع^{٢} + ع + ١) = صفراً

إذاً ع − ١ = صفر أو ع^{٢} + ع + ١ = صفراً

إذاً ع = ١ ، أو ع = - $\frac{١}{٢}$ ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت   [أنظري المثال (٦ − ٤)]

من هذا نستنتج أن للعدد الحقيقي ١ ثلاثة جذور تكعيبية هي :

١ ، - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، - $\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، الأول منها هو الجذر الحقيقي المعروف من قبل ، والآخران لم يكونا معروفين لدى الطالبة ، لأنهما عددان مركبان .

باستطاعة الطالبة أن تتأكد من أن :

$$\left(-\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right)^{٣} = ١ .$$

لاحظي أن الجذرين المركبين مترافقان وأن مجموع الجذور الثلاثة يساوي صفراً .

مثال (٦ − ٧)

حللي العدد ١٣ إلى عوامل مركبة .

الحـــــــــــل :

١٣ = ٩ + ٤

= ٩ − ٤ ت^{٢}

= (٣ − ٢ ت) (٣ + ٢ ت) .

تمارين (٦ – ٢)

(١) حلّي كلاً من المعادلات التالية :

(أ) ع^{٢} = - ١٢

(ب) ع^{٢} + ١٦ = صفراً

(حـ) - ٧ ع^{٢} – ٤ = صفراً

(ى) ع^{٢} - ٨ع + ٢٠ = صفراً

(هـ) ٣ع - ١١ = - ٢٤ + ٤ ع^{٢}

(٢) أوجدي الجذور التربيعية لكل من المقادير التالية :

(أ) ٣ + ٤ ت

(ب) ٥ + ١٢ ت

(حـ) ت

(ى) – ت

[افرضي أن س + ص ت هي الصورة العامة للجذر ، ثم أوجدي س ، ص من المعادلة (س + ص ت)^{٢} = المقدار المعطى] .

(٣) أوجدي س ، ص الحقيقيين ومن ثم س + ص ت في كل ما يأتي :

(أ) (٤ + ٥ ت) + (س + ص ت) = صفراً

(ب) (١ + ت) + (س + ص ت) = صفراً

(حـ) (٣ + ٤ ت) (•س + ص ت) = ١

(ى) (١ + ت) (س + ص ت) = ١

(٤) أوجدي س ، ص الحقيقيين فيما يلي :

(أ) س + ص ت = ٢ + ٧ ت

(ب) (س + ص) + (س − ص) ت = ١٠ + ٢ ت

(ح) س + ص ت = ($\sqrt{٣}$ + ٢ ت) ($\sqrt{٣}$ - ٢ ت)

(ى) س + ص ت = (٢ + ٣ ت)^{٢}

(هـ) (س + ص ت)^{٢} = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

(٥) حللي المقادير التالية إلى عوامل مركبة :

(أ) أ^{٢} + ب^{٢} ، حيث أ ، ب ∈ ح

(ب) ١٠

(ح) ١٢٥

[لاحظي أن : ب^{٢} = - (ب ت)^{٢}]

(٦) حلي المعادلات التالية :

(أ) ع^{٢} + ٩ = صفراً

(ب) ٣ ع^{٢} + ٢ ع + ٣ = صفراً

(ح) ع^{٢} - ع + ١ = صفراً

(ى) ع^{٤} = ١

(هـ) ع^{٣} = ٨

(٧) أوجدي ع في كل من الحالات التالية :

(أ) ع $\bar{ع}$ + ٢ (ع − $\bar{ع}$) = ٢٥ − ١٢ ت

(ب) ع $\bar{ع}$ + ٤ (ع − $\bar{ع}$) = ١٦٩ + ٤٠ ت .

(٨) أوجدي س ، ص الحقيقيين في كل مما يلي :

(أ) (٣ + ٤ ت)^{٢} − ٢ (س − ص ت) = س + ص ت

(ب) $\left(\frac{\text{١ + ت}}{\text{١ - ت}}\right)^{٢}$ + $\frac{\text{١}}{\text{س + ص ت}}$ = ١ + ت ، حيث س^{٢} + ص^{٢} ≠ ٠

(حـ) (٣ − ٢ ت) (س + ص ت) = ٢(س٢-ص ت) + ٢ ت − ١

(٩) أوجدي جميع جذور المعادلة ع^{٤} + ١ = صفراً

٦-٤ التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

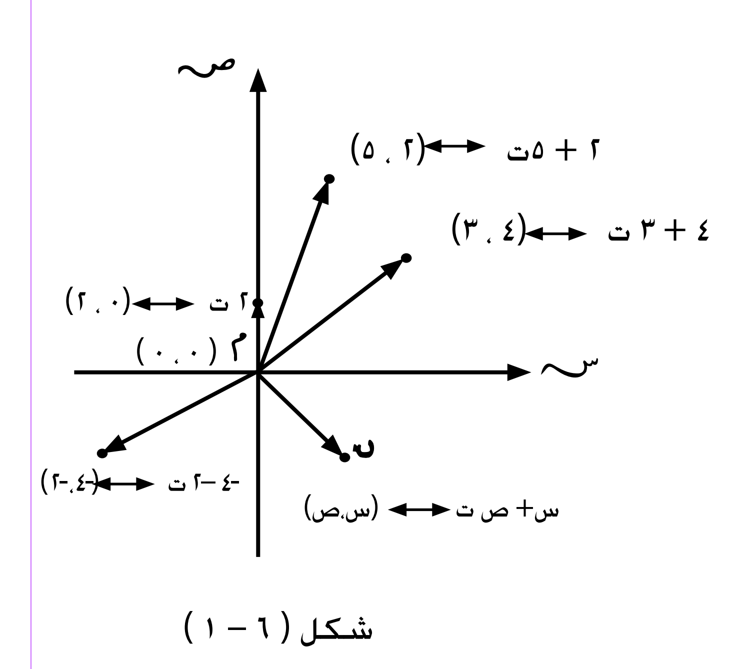
رأينا في البند (٦ − ٢) أن س + ص ت والزوج المرتب (س ، ص) هما وسيلتان للتعبير عن عدد مركب واحد . وقد وجدنا في باب هندسة المتجهات أن هناك تقابلا بين مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) ، ونقط المستوى الإحداثي ح، والمتجهات في ح إذاً لدينا تقابل بين مجموعة الأعداد المركبة ك ونقط المستوى الإحداثي ح ، والمتجهات في المستوى ، معرَّف بالقاعدة :

س + ص ت ⟷ ن (س ، ص) ⟷ $\overrightarrow{\text{م ن}}$

حيث ن محددة باحداثييها س ، ص . انظري الشكل (٦ − ١)

وهذا التقابل بين المجموعتين

ك ، ے يمتد ليشمل بعض العمليات المعرفة على كل منهما .



شكل (٦ – ١)

فإذا كانت

$ع_1 = س_1 + ص_1 ت$

$\leftrightarrow ن_1 \; (س_1 ، ص_1)$

$ع_2 = س_2 + ص_2 ت$

$\leftrightarrow ن_2 \; (س_2 ، ص_2)$

فإن :

$ع_1 + ع_2 = (س_1 + س_2) + (ص_1 + ص_2) ت$ ،

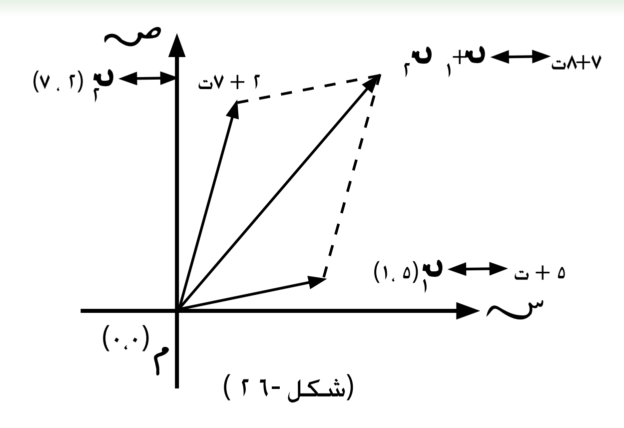
$ن_1 + ن_2 = (س_1 + س_2 ، ص_1 + ص_2)$

فينتج عن ذلك أن :

$ع_1 + ع_2 \leftrightarrow ن_1 + ن_2$

حيث $ن_1 + ن_2$ هو الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع ، الذي رؤوسه الأخرى هي م ، $ن_1$ ، $ن_2$ ، كما هو مبين في الشكل (٦ – ٢) للحالة الخاصة .

$ع_1 = ٥ + ت$ ، $ع_2 = ٢ + ٧ ت$.



(شكل -٦ ٢)

لكل عدد مركب ولكل نقطة (أو متجه) معكوس جمعي .

وكما هو متوقع ، فإن

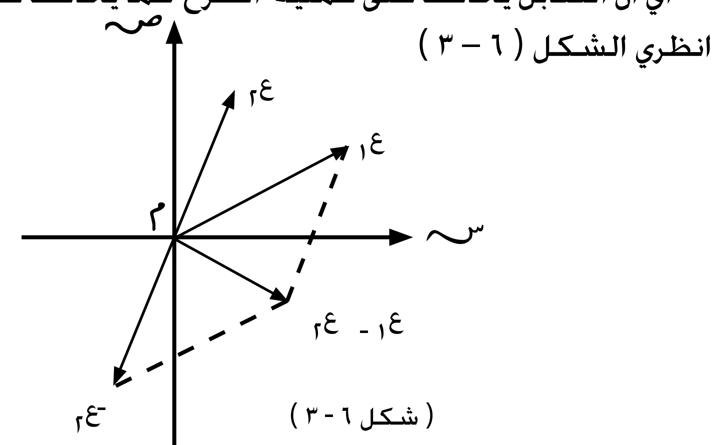
$$\text{ع} = \text{أ} + \text{ب ت} \longleftrightarrow (\text{أ} ، \text{ب}) \Longrightarrow -\text{ع} = -\text{أ} - \text{ب ت} \longleftrightarrow (-\text{أ} ، -\text{ب}) .$$

فنستنتج من ذلك أن :

$$\text{ع}_1 \longleftrightarrow \text{ن}_1 ، \text{ع}_2 \longleftrightarrow \text{ن}_2 \Longrightarrow \text{ع}_1 - \text{ع}_2 \longleftrightarrow \text{ن}_1 - \text{ن}_2 .$$

أي أن التقابل يحافظ على عملية الطرح كما يحافظ على عملية الجمع .

انظري الشكل (٦ – ٣)



(شكل ٦ - ٣)

مثال (٦ – ٨)

ماهو التحويل الهندسي المناظر لكل من التطبيقين

$ٮ_١$ (ع) = $\overline{ع}$ ؟

$ٮ_٢$ (ع) = - ع ؟

الحـــــــل :

لأي عدد مركب ع = س + ص ت

$ٮ_١$ (ع) = $\overline{ع}$ = س – ص ت

إذاً التحويل الهندسي المناظر ، هو الذي يحول النقطة (س ، ص) إلى (س ، - ص) ، وهو تناظر حول المحور السيني .

أما التطبيق $ٮ_٢$: س + ص ت ⟵ - س – ص ت

فهو يناظر التحويل الهندسي

(س ، ص) ⟵ (- س ، - ص)

الذي يمثل تركيب تناظرين : الأول حول المحور السيني ، والثاني حول المحور الصادي ، وهذا يساوي دوراناً حول نقطة الأصل بزاوية ١٨٠° .

لقد سبق أن عرفنا طول المتجه [أ ، ب] حيث أ ، ب $\in$ ح بالعدد الحقيقي $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

وهذا يوحي بالتعريف التالي :

تعريف (٦ – ٥) .

لكل عدد مركب ع = س + ص ت ، يسمى العدد الحقيقي $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ القيمة المطلقة للعدد ع ويرمز له بالرمز | ع |

أي أن :

$$|ع| = \sqrt{س^{2} + ص^{2}}$$

$$= \sqrt{ع \bar{ع}}$$

= طول المتجه $\overleftarrow{م ن}$ ، حيث م = (٠ ، ٠) ، ن = (س ، ص)

لاحظي أن $|ع| \geq$ صفرا في جميع الحالات ، وأن

$|ع| =$ صفراً $\Leftrightarrow \sqrt{س^{2} + ص^{2}} =$ صفراً

$\Leftrightarrow س^{2} + ص^{2} =$ صفراً

$\Leftrightarrow$ س = ص = صفراً

$\Leftrightarrow$ ع = صفراً

ولعل من أهم خواص القيمة المطلقة ما يسمى متباينة المثلث :

لكل $ع_{1}، ع_{2} \in ك$ يكون $|ع_{1} + ع_{2}| \leq |ع_{1}| + |ع_{2}|$

البرهان :

متروك للطالبة وهو يعتمد على أن مجموع طولي ضلعين في مثلث > طول الضلع الثالث كما يترك للطالبة التحقق من صحة هذه المتباينة استناداً إلى التعريف (٦ – ٥).

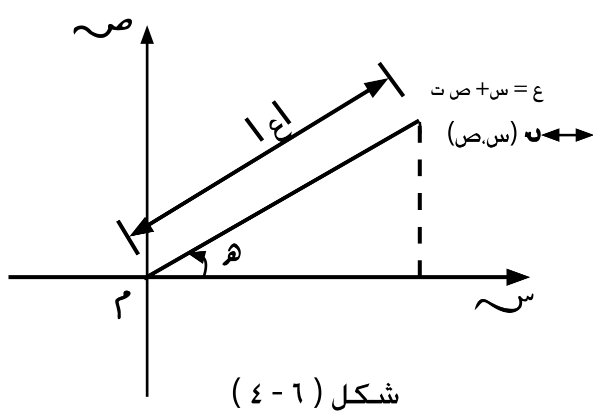
اعتماداً على مفهوم القيمة المطلقة سوف نتعرف الآن على وسيلة أخرى لتمثيل العدد المركب :

ع = س + ص ت .

انظري إلى الشكل (٦ – ٤). ولاحظي أن

س = |ع| جتاهـ

ص = |ع| جاهـ



شكل (٦ - ٤)

حيث هـ = الزاوية من نصف المحور السيني الموجب إلى $\overleftarrow{م ن}$ بحيث

$180° \geq$ هـ $> -180°$.

إذاً ع = س + ص ت

$= |ع|$ (جتا هـ + ت جا هـ)

لاحظي أن $|$ جتا هـ + ت جا هـ $| = \sqrt{(\text{جتا هـ})^2 + (\text{جا هـ})^2}$

$= 1$

أي أن جتا هـ + ت جا هـ يدل على اتجاه ع ويتعين بمعرفة الزاوية هـ

لاحظي أن :

هـ = صفراً $\Leftarrow$ ع $= |ع|$ ، $|ع| \geq$ صفراً

هـ = $180°$ $\Leftarrow$ ع $= -|ع|$ ، $|ع| \geq$ صفراً

هـ = $90°$ $\Leftarrow$ ع $= |ع|$ ت

هـ = $270°$ $\Leftarrow$ ع $= -|ع|$ ت

تسمى الصيغة ع $= |ع|$ (جتا هـ + ت جا هـ) للعدد المركب ع **بالصيغة المثلثية أو الصيغة القطبية** . وتظهر أهميتها في عملية الضرب على الأعداد المركبة . كما يتضح من المثال التالي :

مثال (٦ – ٩)

ماهو التفسير الهندسي لعملية الضرب $ع_1 \cdot ع_2$ لأى $ع_1 , ع_2 \in$ ك ؟

الحـــــــــــل :

لنفرض أن $ع_{١}$ يناظر متجهاً يصنع زاوية $هـ_{١}$ مع نصف المحور السيني الموجب ، $ع_{٢}$ يناظر متجهاً يصنع زاوية $هـ_{٢}$ مع نصف المحور السيني الموجب . كما هو مبين في الشكل (٦–٥).

شكل (٦ - ٥)

إذاً $ع_{١} = |ع_{١}| \left(حتا\, هـ_{١} + ت\, حا\, هـ_{١} \right)$

$ع_{٢} = |ع_{٢}| \left(حتا\, هـ_{٢} + ت\, حا\, هـ_{٢} \right)$

$$ع_{١} \cdot ع_{٢} = |ع_{١}| \cdot |ع_{٢}| \left[\left(حتا\, هـ_{١}\, حتا\, هـ_{٢} - حا\, هـ_{١}\, حا\, هـ_{٢} \right) + \left(حا\, هـ_{١}\, حتا\, هـ_{٢} + حتا\, هـ_{١}\, حا\, هـ_{٢} \right) ت \right]$$

بما أن $حتا\, هـ_{١}\, حتا\, هـ_{٢} - حا\, هـ_{١}\, حا\, هـ_{٢} = حتا\, (هـ_{١} + هـ_{٢})$ ،

$حا\, هـ_{١}\, حتا\, هـ_{٢} + حتا\, هـ_{١}\, حا\, هـ_{٢} = حا\, (هـ_{١} + هـ_{٢})$.

فإن $ع_{١} \cdot ع_{٢} = |ع_{١}| \cdot |ع_{٢}| \left[حتا\, (هـ_{١} + هـ_{٢}) + ت\, حا\, (هـ_{١} + هـ_{٢}) \right]$

وهذا يناظر متجها طوله $|ع_{١}| \cdot |ع_{٢}|$ ويصنع زاوية $(هـ_{١} + هـ_{٢})$ مع نصف المحور السيني الموجب .

أي أن عملية الضرب بين أي عددين في ك تتم بضرب قيمتيهما المطلقتين وجمع زاويتيهما .

نتيجة (٦ - ١) :

إذا كان $ع_{١} = ع_{٢}$ ، فإن $|ع_{١}| = |ع_{٢}|$.

$هـ_1 = هـ_2$ وبالتالي فإننا نجد مما تقدم أن :

$ع_1 \cdot ع_1 = |ع_1|^2$ (حتا ٢ هـ + ت حا ٢ هـ)

لذا إذا كان ع = |ع| (حتا هـ + ت حا هـ)

ورمزنا بـ $ع^2$ للمقدار ع . ع فإننا نجد :

$ع^2 = |ع|^2$ (حتا ٢ هـ + ت حا ٢ هـ)

هذا ، ويمكن التحقق استناداً إلى مبدأ الاستنتاج الرياضي الوارد في البند (٨ − ٧)

أن $ع^ن = |ع|^ن$ (حتا ن هـ + ت حا ن هـ) ، ن ∈ ط حيث :

$ع^ن = \underbrace{ع \cdot ع \cdot ع \cdots ع}_{\text{ن من المرات}}$

نتيجة (٦ − ٢) :

القسمة تتم بقسمة القيمتين وطرح الزاويتين ، أي أن :

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$ [حتا ($هـ_1 - هـ_2$) + ت حا ($هـ_1 - هـ_2$)]

حيث $ع_2 \neq$ صفراً

وباستطاعة الطالبة أن تتحقق من هذه النتيجة بضرب طرفي المساواة السابقة في $ع_2$

نتيجة (٦ − ٣) :

إذا كان ع = |ع| (حتا هـ + ت حا هـ) ≠ صفراً ، فإن

$ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{1}{|ع|}$ [حتا (٠ − هـ) + ت حا (٠ − هـ)]

$= \frac{1}{|ع|}$ (حتا هـ - ت حا هـ)

$\frac{1}{|ع|^2} |ع|$ (حتا هـ - ت حا هـ)

$\frac{1}{|ع|^2} \overline{ع}$

مثال (٦ – ١٠)

بافتراض أن $ع_١ = -\frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $ع_٢ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}$ ت ، عبري

عن $ع_١$ ، $ع_٢$ بالصورة القطبية ، ثم أوجدي $ع_١ ع_٢$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ باستخدام القاعدة

المذكورة أعلاه .

الحـل :

$$|ع_١| = \sqrt{\left(\frac{-٣}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢}$$

$$= ٣$$

إذاً $ع_١ = |ع_١|$ (حتا $هـ_١$ + ت حا $هـ_١$)

$$= ٣ \text{ (حتا} هـ_١ + \text{ت حا} هـ_١ \text{)}$$

$$= ٣ \left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right)$$ من المعطيات

إذاً حتا $هـ_١ = -\frac{١}{٢}$ ، حا $هـ_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

إذاً $هـ_١ = ١٢٠°$

وكذلك $ع_٢ = |ع_٢|$ (حتا $هـ_٢$ + ت حا $هـ_٢$)

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-١}{٢}\right)^٢} \text{ (حتا} هـ_٢ + \text{ت حا} هـ_٢ \text{)}$$

$= حتاهـ_٢ + ت حاهـ_٢$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \left(-\frac{١}{٢}\right)$

إذاً $حتاهـ_٢ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $حاهـ_٢ = -\frac{١}{٢}$

إذاً $هـ_٢ = -٣٠^\circ$

$ع_١ ع_٢ = |ع_١| |ع_٢| [حتا(هـ_١ + هـ_٢) + ت حا(هـ_١ + هـ_٢)]$

$= (٣)(١)[حتا(١٢٠ - ٣٠^\circ) + ت حا(١٢٠ - ٣٠^\circ)]^\circ$

$= ٣ [حتا ٩٠^\circ + ت حا ٩٠^\circ]$

$= ٣ ت$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|} [حتا(هـ_١ - هـ_٢) + ت حا(هـ_١ - هـ_٢)]$

$= \frac{٣}{١} [حتا(١٢٠^\circ + ٣٠^\circ) + ت حا(١٢٠ + ٣٠^\circ)]$

$= ٣ [حتا ١٥٠^\circ + ت حا ١٥٠^\circ]$

$= ٣ [-حتا ٣٠^\circ + ت حا ٣٠^\circ]$

$= ٣ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \frac{١}{٢}\right)$

[يترك للطالبة التحقق من صحة النتيجة باستخدام قانوني الضرب والقسمة من البند (٦ – ٢)]

تمارين (٦ – ٣)

في التمارين ١ – ٦ مثلي كل عدد مركب على مستوى الأعداد المركبة ، وعيني المعكوس الجمعي و المرافق . ثم احسبي المقياس لكل عدد :

(١) ٥ + ٢ ت

(٢) – ٢ + ٥ ت

(٣) – ١ – ت

(٤) ١ – ٢ ت

(٥) ٣ ت

(٦) ٥

عيني الأعداد التالية على المستوى المركب باعتبار أن ع = ٣ + ٢ ت

(٧) ٢ ع

(٨) – ٣ ع

(٩) ت ع

(١٠) – ت ع

(١١) ٦ ت ع

(١٢) (٣ + ت) ع

(١٣) (٣ + ٢ ت) ع

(١٤) (٣ – ٢ ت) ع

(١٥) $\frac{١}{ع}$

(١٦) - $\frac{١}{ع}$

في المسائل ١٧ – ٢١ أثبتي صحة العبارة في كل حالة بطريقة جبرية ، حيث ع ، ف ∈ ك:

(١٧) $\overline{ع . ف} = \overline{ع} . \overline{ف}$

(١٨) $|\bar{ع}| = |ع|$

(١٩) $|ع \cdot ف| = |ع| \cdot |ف|$

(٢٠) $|-ع| = |ع|$

(٢١) $|ت\,ع| = |ع|$

(٢٢) حققي متباينة المثلث عندما تكون :

(أ) $ع_{١}$ = ٣ − ٢ ت ، $ع_{٢}$ = - ٥ + ت

(ب) $ع_{١}$ = ٧ + ٣ ت ، $ع_{٢}$ = - ١٤-٦ ت

(٢٣) اكتبي الأعداد المركبة التالية بالصورة أ + ب ت :

(أ) $\sqrt{٢}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

(ب) ٣ (حتا ٦٠° - ت حا ٦٠°)

(حـ) ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

(ى) حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°

(هـ) − ٧ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

(و) ٩ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

(٢٤) عبري عن الأعداد المركبة التالية بالصورة القطبية :

(أ) ٥

(ب) ٥ ت

(جـ) -٥

(د) -٥ ت

(هـ) $٢ - ٢\sqrt{٣}$ ت

(و) $-٥\sqrt{٣} - ٥$ ت

(ز) $-٣\sqrt{٣} + ٣$ ت

(ح) $-٢ - ٢$ ت

(ط) $-١ +$ ت

(ى) $\sqrt{٢} - \sqrt{٢}$ ت

(٢٥) أوجدي حاصل الضرب $ع_١ \cdot ع_٢$ وناتج القسمة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ في كل من الحالات التالية :

(أ) $ع_١ = ٢$ (حتا $١٢٠°$ + ت حا $١٢٠°$)، $ع_٢ =$ حتا $٣٠°$ + ت حا $٣٠°$

(ب) $ع_١ = ٣$ (حتا $٣٠°$ + ت حا $٣٠°$)

$ع_٢ = ٤$ (حتا $١٥٠°$ - ت حا $١٥٠°$)

(جـ) $ع_١ =$ حتا $٦٠°$ − ت حا $٦٠°$، $ع_٢ =$ حتا $١٥٠°$ + ت حا $١٥٠°$

(٢٦) عيني ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ على المستوى المركب إذا كانت ع تساوي

(أ) ٢ ت

(ب) ٢ + ٢ ت

(حـ) – ٢ ت

(ء) – ٣ + ٢ ت

(هـ) – ٣ – ٥ ت

(و) حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°

(ز) $\frac{١}{٢}$ (حتا ٦٠° – ت حا ٦٠°)

الخـــلاصــــة

(١) كثير من المعادلات البسيطة مثل $س^{٢} + ١ = $ صفراً أو $س^{٢} - س + ٣ = $ صفراً غير قابلة للحل فى حقل الأعداد الحقيقية ، مما يتطلب توسيع هذا الحقل الى حقل الأعداد المركبة (ك ، + ، ٠) ، حيث ك هي مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) ، والتي غالبا ما تكتب على الصورة س + ص ت ، حيث س ، ص ∈ ح ، ت = $\sqrt{-١}$. وقد عُرِفَتْ عمليات الجمع والطرح، والضرب والقسمة على ك بشكل ينسجم مع تعريف هذه العمليات على ح ، التي نعتبرها مجموعة جزئية ك .

(٢) في حقل الأعداد المركبة يمكن حل معادلة الدرجة الثانية :

$أ ع^{٢} + ب ع + حـ = $ صفراً بالقانون

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ صفراً .

(٣) لكل عدد مركب ع = س + ص ت نعرف :

المرافق : $\overline{ع}$ = س − ص ت .

القيمة المطلقة : | ع | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

(٤) تمثل الأعداد المركبة بنقط هندسية على المستوى الإحداثي ، اعتماداً على التقابل بين الأزواج المرتبة (س ، ص) ونقط المستوى. وهذا يقودنا إلى التمثيل القطبي للعدد المركب ع = س + ص ت

| ع | (جتا هـ + ت جا هـ) .

وللصيغة القطبية ميزة في تفسير عمليتي الضرب والقسمة هندسياً .

تمارين عامة

(١) اذكري من بين الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية والحقيقية والمركبة النظام العددي الذي تتحقق فيه الخواص التالية :

(أ) وجود عنصر الجمع المحايد .

(ب) وجود عنصر الضرب المحايد .

(حـ) وجود المعكوس الجمعي .

(ء) وجود المعكوس الضربي .

(هـ) وجود حل للمعادلة س + أ = ب حيث أ ، ب عنصران في النظام العددي .

(و) وجود حل للمعادلة أ س = ب حيث أ ، ب عنصران في النظام العددي ، أ ≠ صفراً .

(ز) وجود حل للمعادلة س^{٢} = أ حيث أ ≤ صفراً.

(ح) وجود حل للمعادلة س^{٢} = أ حيث أ > صفراً .

(٢) ضعي في صورة أ + ب ت :

(أ) (١٢ − ٣ ت) + (- ١٣ + ٧ ت)

(ب) ٢ - ٣ ت + ٥ − ١ + ٤ ت

(جـ) (١ − ت) - (٢ + ٣ ت) + (- ٧ − ت)

(د) ٢ ت (٤ + ٥ ت) + ٥ (٩ + ٢ ت)

(هـ) (١ − ٦ ت) (١ + ت)

(و) (√٣ − ت) (١ − √٣ ت)

(ز) (أ + ب ت)^{٢}

(ح) (س + ص ت) (س − ص ت)

(ط) (أ + ب ت) (س − ص ت) + (أ − ب ت) (س + ص ت)

(ى) (أ + ب ت)^{٢} . (أ − ب ت)^{٢}

(ك) $\frac{١}{٢ + ت}$

(ل) (٣ + ت) . (٣ − ت) . $\left(\frac{٢ + ت}{١٠}\right)$

(م) $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$

(ن) $\dfrac{\text{١٠ ت}}{(\text{ت - ١})\ (\text{ت - ٢})\ (\text{ت - ٣})}$

(س) $\left(\dfrac{١}{٢ + \sqrt{٣}\,\text{ت}} - \dfrac{١}{٢ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}\right) . \left(\dfrac{١}{٢ + \sqrt{٣}\,\text{ت}} + \dfrac{١}{٢ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)$

(٣) أوجدي مجموعة حل كل من المعادلات التالية في (ك ، + ، ٠) :

(أ) ع^{٢} – ٧ ع + ١٠ = صفراً

(ب) – ٣ ع^{٢} + ٨ ع – ٥ = صفراً

(جـ) ع^{٣} + ١١ ع = صفراً

(ى) – ٥ ع^{٢} + ١٢ ع -١١ = صفراً

(هـ) ع^{٤} – ٥ ع^{٢} + ٤ = صفراً

(٤) احسبي د (ع) = ع^{٢} – ت ع + (١ – ٣ ت) في كل من الحالات التالية :

(أ) ع = ١ + ٢ ت

(ب) ع = ٣ – ٢ ت

(جـ) ع = ١ + ت

(٥) متى يكون $\overline{\text{ع}}$ = ع ومتى يكون $\overline{\text{ع}}$ = - ع ؟

(٦) صفي مجموعة النقط في المستوى الإحداثي التي تحقق كلاً مايلي :

(أ) ع + $\overline{\text{ع}}$ = ٤

(ب) ع − ع̄ = ٦ ت

(حـ) ع − ع̄ = ٣ + ٢ ت

(د) ع − ع̄ = ١

(هـ) | ع | = ١

(و) | ع | > ٥

(ز) ٥ < | ع | < ٣

(ح) | ع - (١ + ت) | ≥ ٤

(ط) | ع − ١ | ≥ | ع + ١ |

(ى) ع = ت + ٣ (١ + ٢ ت)

(ك) ع = ت + أ (١ − ٢ ت) حيث أ ∈ ح

(٧) إذا كانت ع٢ = (ع̄)٢ فأثبتي أن ع إما حقيقي أو تخيلي بحت .

(٨) صفي التحويلات الهندسية التي تطبق المستوى فوق نفسه بواسطة كل من التطبيقات التالية :

(أ) ع ⟵ ٢ ت ع

(ب) ع ⟵ ع + (٣ + ٢ ت)

(حـ) ع ⟵ - ع̄

الباب السابع

الدوال الأسية واللوغاريتمية

٧ - ١ قوانين الأسس .

سبق أن درست في كتاب الصف الأول الثانوي في الباب السادس موضوع الأسس الصحيحة وفيما يلي سنكتب التعاريف والنظريات التي درستيها وسنعطي أمثلة وتمارين عليها لأهميتها في توسيع دراستك إلى دراسة الدوال الأسية بأسس نسبية وحقيقية.

تعريف (٧ - ١)

إذا كان أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط، فإن القوة النونية للعدد أ (أ أس ن) هي :

أ^{ن} = أ × أ × أ × ... × أ (ن من المرات)

تعريف (٧ – ٢)

$\forall$ أ $\in$ ح* ، ن $\in$ ط نعرف

(١) أ$^{-ن}$ = (أ$^{-١}$)^{ن} (٢) أ^{٠} = ١

نظرية (٧ – ١)

$\forall$ أ ، ب $\in$ ح* ، $\forall$ م ، ن $\in$ صـ ، فإن :

(١) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$.

(٢) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$.

(٣) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$.

(٤) $(أ ب)^{م} = أ^{م} ب^{م}$

(٥) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$.

ملاحظة (٧ – ١)

$٠^{ن} = ٠$ حيث ن $\in$ ط

تعريف (٧ – ٣)

إذا كان أ $\in$ ح ، أ $\geq$ ٠ ، ن $\in$ ط ، فإن العدد الحقيقي س $\geq$ ٠ .

الذي يحقق المعادلة $= س^{ن}$ ، يسمي الجذر النوني للعدد ، ويرمز له

بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ أو $أ^{\frac{١}{ن}}$.

ملاحظة (٧ – ٢)

من التعريف $\sqrt[ن]{صفر}$ = صفراً ، حيث ن $\in$ ط

تعريف (٧ - ٤)

إذا كان أ ∈ ح ، ن ∈ ط ، ن عدداً فردياً ، فإن س = $\sqrt[ن]{أ}$ هو العدد الحقيقي الذي يحقق المعادلة أ = $س^{ن}$.

نظرية (٧ - ٢)

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، ن ∈ ط فإن :

(١) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \cdot \sqrt[ن]{ب}$ حيث أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠ إذا كان ن زوجيا

(٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث { أ ≥ ٠ ، ب > ٠ إذا كان ن زوجياً ؛ أ ∈ ح ، ب ∈ ح* إذا كان ن فردياً }

مثال (٧ – ١)

أوجدي قيمة ما يأتي :

(أ) $٣^{٥}$　　(ب) $\frac{(٢)^{٤}}{(٣)^{٤}}$　　(جـ) $\left[\sqrt{٣}\right]^{٣}$

الحـــــــل :

(١) $٣^{٥} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٤٣$

(ب) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{١٦}{٨١}$.

(حـ) $\left(\sqrt{٣}\right)^{٤} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣\sqrt{٣}$.

مثال (٧ – ٢)

(أ) $٣^{-٢} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$

(ب) $٢٥ \times ٥^{-٢} = ٢٥ \times ٥^{-٢}$

$= ٥^{٢ + (-٢)} = ٥^{\text{صفر}} = ١$.

(حـ) $\left(\sqrt{٢}\right)^{-٢} = \frac{١}{\left(\sqrt{٢}\right)^{٢}} = \frac{١}{٢}$

مثال (٧ – ٣)

احسبي قيمة $\frac{٣^{ن+١} - ٣^{ن-١}}{٣^{ن} + ٣^{ن-١}}$ حيث ن ∈ ص

الحـــــــل :

$\frac{٣^{ن+١} - ٣^{ن-١}}{٣^{ن} + ٣^{ن-١}} = \frac{٣^{ن-١} \times ٣^{٢} - ٣^{ن-١}}{٣^{ن-١} \times ٣ + ٣^{ن-١}}$

$$= \frac{٣^{ن-١}\,(٣^{٢} - ١)}{٣^{ن-١}\,(٣ + ١)}$$

$$= \frac{٩ - ١}{٤} = ٢ .$$

مثال (٧ - ٤)

أوجدي قيمة $\frac{٩^{ن} \times ٦^{ن+١}}{٢٧^{ن} \times ٢^{ن+٣}}$ ، حيث ن $\in$ ص

الحـــــــــــل :

المقدار $= \frac{(٣^{٢})^{ن} \times (٣ \times ٢)^{ن+١}}{(٣^{٣})^{ن} \times ٢^{ن+٣}}$

$$= \frac{٣^{٢ن} \times ٣^{ن+١} \times ٢^{ن+١}}{٣^{٣ن} \times ٢^{ن+٣}}$$

$$= \frac{٣^{٣ن+١} \times ٢^{ن+١}}{٣^{٣ن} \times ٢^{ن+٣}}$$

$$= ٣^{٣ن+١-٣ن} \times ٢^{ن+١-ن-٣}$$

$$= ٣ \times ٢^{-٢}$$

$$= ٣ \times \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{٣}{٤} .$$

مثال (٧ – ٥)

(١) $٤^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$.

(٢) $(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$.

(٣) $(-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$.

تعريف (٧ – ٥)

$\forall$ أ $\in$ ح* ، $\forall$ م $\in$ ص ، ن $\in$ ط نعرف

$$\left(أ^{\frac{١}{ن}}\right)^{م} = \left(أ^{م}\right)^{\frac{١}{ن}} = أ^{\frac{م}{ن}}$$

شريطة أن يكون أ $>$ ٠ إذا كان ن زوجياً

مثال (٧ – ٦)

(١) $\left(\sqrt[٣]{٢}\right)^{٦} = \left(٢^{\frac{١}{٣}}\right)^{٦} = ٢^{\frac{١}{٣} \times ٦} = ٢^{٢} = ٤$.

(ب) $(٣٢)^{-\frac{٣}{٥}} = \left[٣٢^{\frac{١}{٥}}\right]^{-٣} = \left[(٢^{٥})^{\frac{١}{٥}}\right]^{-٣}$

$= (٢)^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

(حـ) $\left[\sqrt[٥]{-٣٢}\right]^{٢} = \left[(-٣٢)^{\frac{١}{٥}}\right]^{٢}$

$= \left[\left((-٢)^{٥}\right)^{\frac{١}{٥}}\right]^{٢}$

$= (-٢)^{٢}$

$= (-٢)(-٢)$

$= ٤$

مثال (٧ – ٧)

$\sqrt{\sqrt[٣]{٦٤}} = \sqrt[٣]{(٨^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$

$= \sqrt[٣]{٨^{٢ \times \frac{١}{٢}}}$

$= \sqrt[٣]{٨} = ٢$ .... (١)

ملاحظة (٧ – ٣)

من المثال السابق نجد أن :

$$\sqrt[٣]{\sqrt{٦٤}} = (\sqrt{٦٤})^{\frac{١}{٣}}$$

$$= \left(٦٤^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$= ٦٤^{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}}$$

$$= (٦٤)^{\frac{١}{٦}}$$

$$= (٢^{٦})^{\frac{١}{٦}}$$

$$= ٢^{٦ \times \frac{١}{٦}} \qquad = ٢$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في (١)

وبوجه عام :

$\left(أ^{\frac{١}{م}}\right)^{\frac{١}{ن}} = أ^{\frac{١}{م ن}}$ حيث م ، ن $\in$ ط ، أ $\in$ ح ، شريطة أن

يكون أ $\geq$ ٠ حين يكون كلا من م و ن عدداً زوجياً .

نظرية (٧ – ٣) :

$\forall$ م ، ن $\in$ ن ، أ $\in$ ح ، أ > ٠ فإن :

$$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$$

البرهان :

نفرض أن م = $\frac{حـ}{ى}$ ، ن = $\frac{هـ}{و}$ حيث :

$\frac{حـ}{ى}$ ، $\frac{هـ}{و}$ $\in$ ن، م ، ن في أبسط صورة .

$$(أ^{م})^{ن} = \left(أ^{\frac{حـ}{ى}}\right)^{\frac{هـ}{و}}$$

$$= \left(\left(أ^{\frac{1}{ى}}\right)^{حـ}\right)^{\frac{هـ}{و}}$$ من التعريف (٧ – ٥)

$$= \left(\left(\left(أ^{\frac{1}{ى}}\right)^{حـ}\right)^{هـ}\right)^{\frac{1}{و}}$$ من التعريف (٧ – ٥)

$$= \left(\left(أ^{\frac{1}{ى}}\right)^{حـ هـ}\right)^{\frac{1}{و}}$$ حيث حـ، هـ $\in$ ص

$$= \left(\left(\text{أ}^{\frac{1}{\text{د}}}\right)^{\frac{1}{\text{و}}}\right)^{\text{جـ هـ}}$$ (لماذا؟)

$$= \left(\text{أ}^{\frac{1}{\text{د و}}}\right)^{\text{جـ هـ}}$$ من الملاحظة (٧ – ٣)

$$= \text{أ}^{\frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}}}$$ (لماذا ؟)

$$= \text{أ}^{\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}}}$$

$$= \text{أ}^{\text{م ن}} .$$

نظرية (٧ – ٤)

∀ م ، ن ∈ ن ، أ ∈ ح ، حيث أ > ٠ ، فإن :

$$\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م} + \text{ن}} .$$

البرهان

نفرض أن م $= \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ، ن $= \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ حيث م ، ن في أبسط صورة .

$$\text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\frac{\text{جـ}}{\text{د}}} = \text{أ}^{\frac{\text{جـ و}}{\text{د و}}} ، \quad \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\frac{\text{هـ}}{\text{و}}} = \text{أ}^{\frac{\text{د هـ}}{\text{د و}}}$$

إذاً $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\frac{\text{جـ و}}{\text{د و}}} \times \text{أ}^{\frac{\text{د هـ}}{\text{د و}}}$

$$= \left(\text{أ}^{\frac{1}{\text{د و}}}\right)^{\text{جـ و}} \times \left(\text{أ}^{\frac{1}{\text{د و}}}\right)^{\text{د هـ}}$$ من التعريف (٧ – ١)

$$= \left(\text{أ}^{\frac{1}{\text{د و}}}\right)^{\text{جـ و} + \text{د هـ}}$$ لأن جـ و ، د هـ ∈ ص

$$= أ^{\frac{جـ و + د هـ}{د و}}$$

$$= أ^{\frac{جـ و}{د و} + \frac{د هـ}{د و}}$$

$$= أ^{\frac{جـ}{د} + \frac{هـ}{و}}$$

$$= أ^{م + ن}$$

نتيجة (٧ – ١)

$أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م - ن}$ حيث م، ن $\in$ ، أ $\in$ ح

ملاحظة (٧ – ٤)

بعد هذه الدراسة نلاحظ أن قوانين الأسس صحيحة في حالة كون هذه الأسس من المجموعة ن

مثال (٧ – ٨)

(أ) $٣^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{٣}{٤}} = ٣^{\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}} = ٣^{\frac{٥}{٤}} = ٣^{١ + \frac{١}{٤}} = ٣ \times ٣^{\frac{١}{٤}} = ٣ \sqrt[٤]{٣}$

(ب) $\frac{٥^{\frac{٣}{٢}}}{٥^{\frac{٥}{٢}}} = ٥^{\frac{٣}{٢} - \frac{٥}{٢}} = ٥^{-١} = \frac{١}{٥}$

(جـ) $\frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt[٣]{٩}} = \frac{\sqrt{٣^{٣}}}{\sqrt[٣]{٣^{٢}}} = \frac{٣^{\frac{٣}{٢}}}{٣^{\frac{٢}{٣}}} = ٣^{\frac{٣}{٢} - \frac{٢}{٣}} = ٣^{\frac{٥}{٦}} = \sqrt[٦]{٢٤٣}$.

(ى) $\sqrt[٣]{\sqrt{٧٢٩}} = \left(\sqrt{٣^{٦}}\right)^{\frac{١}{٣}} = \left(\left(٣^{٦}\right)^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{١}{٣}} = \left(٣^{٦}\right)^{\frac{١}{٦}}$

$= ٣$

مثال (٧ – ٩)

حلّي المعادلة $\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}} = ٢٧^{س + ٢}$ حيث س ∈ ح .

الحـــــــل :

$\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}} = \sqrt[٣]{٣^{-٢}} = ٣^{-\frac{٢}{٣}}$ ،

$٢٧^{س+٢} = (٣^{٣})^{س+٢} = ٣^{٣س+٦}$

إذاً $٣^{-\frac{٢}{٣}} = ٣^{٣س+٦}$

إذاً $-\frac{٢}{٣} = ٣س+٦$

$\Longleftrightarrow ٣س = -\frac{٢}{٣} - ٦$

$\Longleftrightarrow س = \frac{-٢٠}{٩}$

تمارين (٧ – ١)

(١) اختصري كلاً مما يلي لأبسط صورة :

(أ) $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{أ^{2}}}\right]^{\frac{3}{4}}$ ، حيث أ ∈ ح ، أ > ٠

(ب) $\left(س\sqrt{س}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\sqrt[3]{س^{4}}\right)^{-\frac{8}{3}}$ ، حيث س ∈ ح ، س > ٠

(٢) اختصري كلاً مما يلي لأبسط صورة :

(أ) $2^{2س-3} \times 4^{2-س} \times 2^{س-1}$ حيث س ∈ ص .

(ب) $3^{س+1} \times 9^{س-\frac{1}{2}} \times 9^{-\frac{3}{2}س}$ حيث س ∈ ص .

(ج) $25^{2-س} \times 5^{3س-4}$ حيث س ∈ ص .

(٢) أوجدي قيمة كل ما يأتي :

(أ) $(32)^{-\frac{3}{5}}$

(ب) $(27)^{\frac{2}{3}}$

(ج) $\left(\sqrt[5]{125}\right)^{-\frac{5}{3}}$

(د) $(81)^{-\frac{1}{4}}$

(هـ) $\frac{\sqrt[3]{15} \times \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{2}}$

(و) $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

(ز) $\frac{4^{ن+1} \times 6^{2ن-1}}{9^{ن-1}}$ حيث ن ∈ ص

(٤) إذا كانت $س \in ح$ ، فأوجدي قيمة س في كل مما يلي :

(أ) $\left(\sqrt[5]{243}\right)^{2} = 3^{س - \frac{1}{2}}$

(ب) $\sqrt{3} \times 9^{س+1} = \sqrt[3]{9}$.

(جـ) $2^{س} \times \sqrt[3]{4} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(د) $(س + 2)^{\frac{1}{3}} = 3$.

(هـ) $\left(س - \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$.

٧-٢ الدالة الأسية

تعريف (٧ – ٦)

إذا كان $أ \in ح^{+} - \{1\}$ وكان $د_{أ}$ تطبيقا من ح الى $ح^{+}$ (حيث $ح^{+}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) معرفاً بالقاعدة :

$د_{أ} : س \longrightarrow د_{أ}(س)$ ، $د_{أ}(س) = أ^{س}$

فإن $د_{أ}$ تسمى الدالة الأسية للأساس أ .

ملاحظة (٧ – ٥)

(١) تجدر الإشارة إلى أننا لم نعرف الدالة $أ^{س}$ في حال كون س عدداً حقيقياً غير نسبي. لكننا سنقبل بوجود هذه الدالة ، وبانها تحقق كل الخواص التي تحققها الدالة $أ^{س}$ عندما يكون س عدداً نسبياً .

(٢) في الرمز $أ^{س}$ ، يسمى أ الأساس ، س الأس .

(٣) مجال $وه_{أ}$ هو ح ، أي أن الأس س $\in$ ح .

(٤) نرى من التعريف ان $أ \neq ١$ ، لأنه عندما $أ = ١$ نجد $وه_{١}$ (س) = ١ وهي دالة ثابتة

مثال (٧ – ١٠)

(أ) $وه_{٢}$: س $\longmapsto$ $وه_{٢}$ (س) $= ٢^{س}$

(ب) $وه_{٣}$: س $\longmapsto$ $وه_{٣}$ (س) $= ٣^{س}$

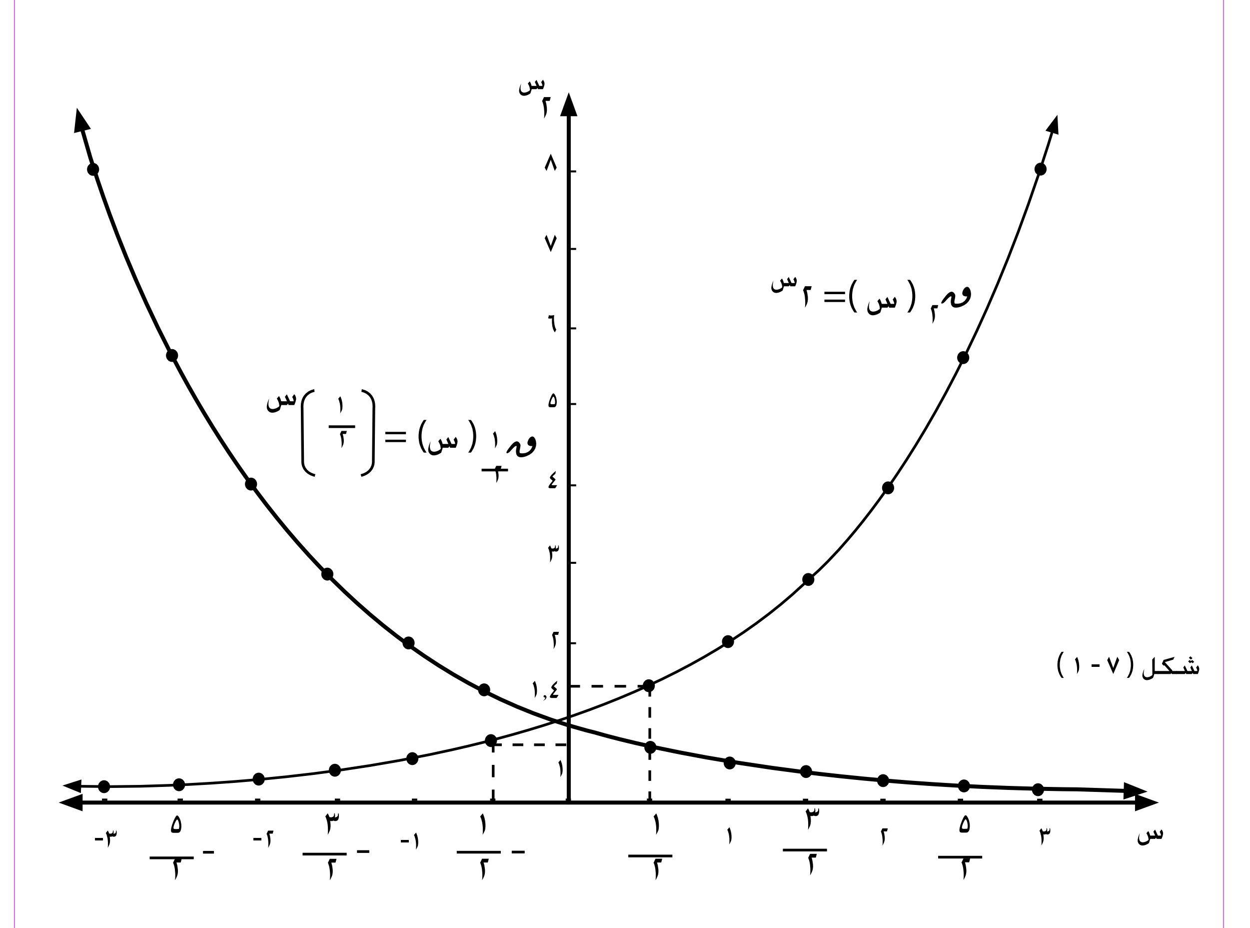
(حـ) $وه_{\frac{٢}{٣}}$: س $\longmapsto$ $وه_{\frac{٢}{٣}}$ (س) $= \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(ء) $وه_{\sqrt{٣}}$: س $\longmapsto$ $وه_{\sqrt{٣}}$ (س) $= (\sqrt{٣})^{س}$

مثال (٧ – ١١)

ارسمي منحني الدالة :

$وه_{٢}$: س $\longmapsto ٢^{س}$ ، ومن الرسم احسبي قيمة تقريبية لكل من العددين $\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$



شكل (٧ - ١)

نكون الجدول الآتي باختيار قيم مناسبة للعدد س وحساب $د_{٢}$ (س) .

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$د_{٢}(س) = ٢^{س}$	$٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$	٠,٢٥	٠,٥	١	٢	٤	٨

ونرسم منحنى $د_{٢}$ (س) كما بالشكل (٧ – ١) .

لنأخذ أولا $\sqrt{٢}$:

$$\sqrt{٢} = ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢^{س} \Longrightarrow س = \frac{١}{٢} .$$

نرسم من النقطة س = $\frac{1}{2}$ مستقيماً يوازي المحور الصادي ، فيقطع المنحني في نقطة، نرسم منها مستقيماً يوازي المحور السيني ليقابل المحور الصادي قرب العدد ١,٤ فيكون :

$$\sqrt{2} \simeq 1.4$$

وبنفس الطريقة: $\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{س} \Leftarrow س = -\frac{1}{2}$

وباتباع نفس الخطوات السابقة نجد أن :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$$

مثال (٧ – ١٢)

ارسمي منحنى الدالة ص = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

الحـــــــل :

$$ص = \left(\frac{1}{2}\right)^{س} = (2^{-1})^{س} = 2^{-س}$$

بفرض أن $ع_{ص}$ تناظر حول محور الصادات .

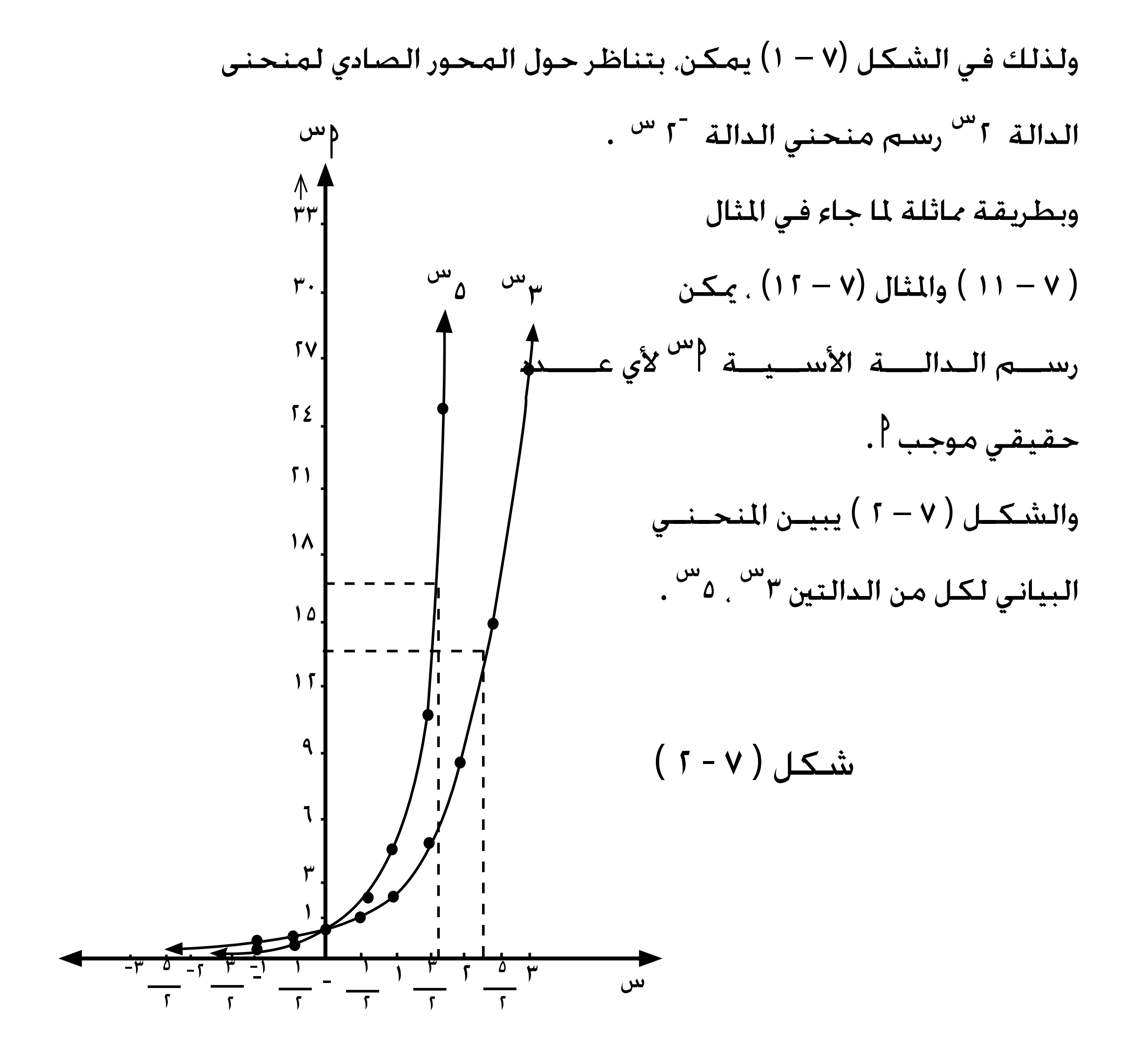
$ع_{ص}$: (س ، ص) ⟵ (- س ، ص) ، أي أن :

$ع_{ص}$: (س ، $2^{س}$) ⟵ (- س ، $2^{س}$)

ولذلك في الشكل (٧ – ١) يمكن، بتناظر حول المحور الصادي لمنحنى الدالة $٢^{س}$ رسم منحني الدالة $٢^{-س}$.

وبطريقة مماثلة لما جاء في المثال (٧ – ١١) والمثال (٧ – ١٢) ، يمكن رسم الدالة الأسية $أ^{س}$ لأي عدد حقيقي موجب أ.

والشكل (٧ – ٢) يبين المنحني البياني لكل من الدالتين $٣^{س}$ ، $٥^{س}$.



شكل (٧ - ٢)

سنورد الآن الخواص التالية المتعلقة بالدالة الأسية :

(١) الدالة الأسية قيمتها دائما موجبة ، لأن مجالها المقابل هو $ح^{+}$.

و الدالة $أ^{س}$ من نوع التقابل حيث أ $\in$ $ح^{+}$ - { ١ } .

(٢) المنحنى البياني لأي دالة أسية يمر بالنقطة (٠ ، ١) .

(٣) إذا كانت أ = ١ فإن $د_١$ (س) = $١^{س}$ = ١ ، وهي دالة ثابتة ويمثلها بيانياً

خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ١) ويوازي المحور السيني .

(٤) جميع الدوال الأسية تحقق الشرط :

$د_أ$ ($س_١$ + $س_٢$) = $د_أ$ ($س_١$) × $د_أ$ ($س_٢$) ، ∀ $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ح .

فمثلاً :

$د_٢$ ($س_١$) = $٢^{س_١}$ ، $د_٢$ ($س_٢$) = $٢^{س_٢}$.

$د_٢$ ($س_١$ + $س_٢$) = $٢^{س_١ + س_٢}$

إذاً $٢^{س_١}$ × $٢^{س_٢}$ = $٢^{س_١ + س_٢}$

تمارين (٧ – ٢)

(١) ارسمي المنحنى البياني للدالة ص = $٢^{س}$ ، ومن الرسم أوجدي قيمة تقريبية $\sqrt{}$

لكل من :

(أ) $٢^{٠,٤}$ (ب) $٢^{٠,٦}$ (حـ) $٢^{٤}$ (ى) $٢^{-١,٢٥}$

إذا تذكرنا الخاصة (٤) من خواص الدالة الأسية أي أن :

$٢^{٠,٤} \times ٢^{٠,٦} = ٢^{٠,٤+٠,٦} = ٢^{١} = ٢$ ، فهل جوابك في (أ) .

(ب) يظهر معقولاً ؟ .

(٣) ارسمي المنحنى البياني للدالة ص = $٣^{س}$ ، ومن الرسم أوجدي قيمة تقريبية

لكل من :

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (حـ) $٣^{١,٥}$ (ء) $٣^{-١,٥}$

حاولي من النتائج التي حصلت عليها أن تحققي الخاصة (٤) من خواص الدالة الأسية .

٧-٣ الدوال اللوغاريتمية

ذكرنا في بند (٧ – ٢) أن من خواص الدالة الأسية :

$ق_{أ}$ (س) : س ⟵ $أ^{س}$ أو ص = $أ^{س}$

حيث أ ∈ $ح^{+}$ - { ١ } ، س ∈ ح ، أنها دالة من نوع التقابل من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

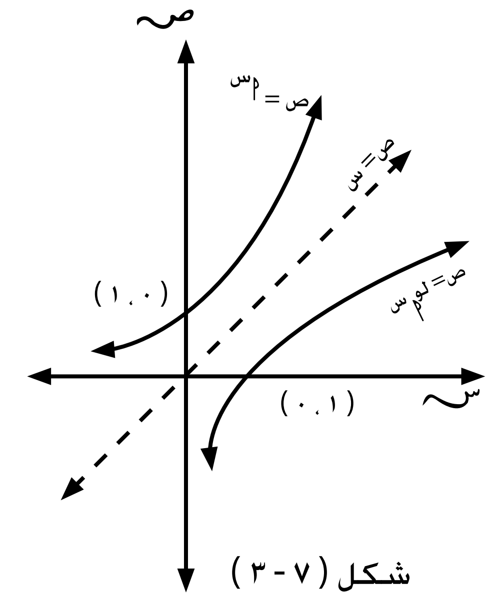
تعريف (٧ – ٧)

إذا كان $م \in ح^{+} - \{ ١ \}$ فإن :

$ص = لو_{م}\, س \iff س = م^{ص}$

والرمز $لو_{م}$ س يُقرأَ «لوغاريتم س للأساس م» .

ويلاحظ في الشكل (٧ – ٣) انه بتناظر حول المستقيم ص = س لمنحني الدالة ص = $م^{س}$ ، فإننا نحصل على المنحنى البياني للدالة س = $م^{ص}$ $\iff$ ص = $لو_{م}$ س . مما يدل على أن كلاً من الدالتين الأسية اللوغاريتمية معكوس الأخرى.



شكل (٧ - ٣)

ويلاحظ كذلك أن الدالة اللوغاريتمية مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $ح^{+}$ ، ومجالها المقابل هو ح ، أي أن :

$لو_م : ح^+ \longrightarrow ح : س \longrightarrow ص = لو_م س$

مثال (٧ – ١٣)

اكتبي الصيغة اللوغاريتمية لكل مما يأتي :

(أ) $٢٧ = ٣^٣$ (ب) $٦٢٥ = ٥^٤$

(حـ) $١٢٨ = ٢^٧$

(ى) $ل = م^ن$ حيث $ن \neq ٠$ ، $م \in ح^+ - \{ ١ \}$.

من التعريف (٧ – ٧) نرى أن لوغاريتم أي عدد لأساس معين ، هو الأس الذي إذا رفع إليه الأساس ، نتج العدد . وعلى ذلك ، فإن الصيغة اللوغاريتمية هي :

(أ) $٣ = لو_٣ ٢٧$. (حـ) $٧ = لو_٢ ١٢٨$.

(ب) $٤ = لو_٥ ٦٢٥$. (ى) $ن = لو_م ل$.

مثـــال (٧ – ١٤)

حلي كلاً من المعادلات الآتية :

(أ) $لو_٣ س = ٤$ (ب) $لو_س ٤ = \frac{٤}{٥}$ (حـ) $لو_٢ \frac{١}{٣٢} = س$

الحــــــل :

(أ) $س = ٣^٤$ من التعريف (٧ – ٧)

$= ٨١$

(ب) $٤ = س^{\frac{٤}{٥}}$ من التعريف (٧ – ٧)

إذاً $(٤)^{\frac{٥}{٤}} = (س^{\frac{٤}{٥}})^{\frac{٥}{٤}}$

إذاً $٢^{\frac{٥}{٢}} = س = ٤\sqrt{٢}$.

(حـ) $\frac{١}{٣٢} = ٢^{س}$ (لماذا ؟)

إذاً $٢^{س} = \frac{١}{٢^{٥}} = ٢^{-٥}$

إذاً س = - ٥

تمارين (٧ – ٣)

(١) ضعي كلاً مما يأتي في صيغة لوغاريتمية :

(أ) $٢١٦ = ٦^{٣}$ (ب) $١٣٣١ = ١١^{٣}$ (حـ) $س = ص^{٥}$

(ى) $٥٢ = ٥٢^{١}$ (هـ) $١٠٠ = ١٠^{٢}$ (و) $\frac{١}{٨١} = ٣^{-٤}$

(ز) $\frac{١}{٢٥} = ٥^{-٢}$ (ح) $٠,١ = ١٠^{-١}$ (ط) $٠,٠٠١ = ١٠^{-٣}$

(٢) ضعي كلاً من المقادير التالية في صيغة أسية ، ثم تحققي من ذلك :

(أ) لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣ (ب) لو$_{١٠}$ ١ = صفر (حـ) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ٣

(ء) لو$_{١٣}$ ٢١٩٧ = ٣ (هـ) لو$_{٥}$ ٦٢٥ = ٤ (و) لو$_{٦٢٥}$ ١ = صفراً

(ز) لو$_{١٠}$ ٠,٠٠١ = - ٣ (ح) لو$_{س}$ ص = ٥

(ط) لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٠٠١ = - ٥

(٣) في كل مما يأتي أوجدي لوغاريتم الأعداد طبقاً للأساس المبين :

(أ) للأساس ٢ : ٨ ، ٣٢ ، ٢٥٦ ، ١٠٢٤ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٣٢}$.

(ب) للأساس ٥ : ١ ، ٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، $\frac{١}{٢٥}$ ، $\frac{١}{١٢٥}$.

(حـ) للأساس ١٠ : ١٠٠٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠ ، ١٠ ، ١ ، ٠,١ ، ٠,٠١ .

(٤) حلي المعادلات الآتية :

(أ) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٨١}$ = س − ٢ (ب) لو$_{٥}$ ٢٥ = ٨ س

(حـ) لو$_{١٠}$ ٠,١ = س + ١ (ء) لو$_{س}$ ٦٤ = ٣

(هـ) لو$_{س}$ ٢,٢٥ = $\frac{٢}{٣}$ (و) لو$_{س}$ $\frac{٣}{٨}$ = ٣ $\frac{٣}{٢}$

(ز) لو$_{٨}$ (س + ٣) = $\frac{١}{٣}$ (ح) لو$_{١٦}$ (س − ١) = - $\frac{١}{٢}$

(٥) أثبتي أن : $لو_{٤}$ ١٦ + $لو_{٤}$ ٦٤ = $لو_{٤}$ ١٠٢٤

(٦) أثبتي أن : $لو_{٢}$ ٣٢ + $لو_{٢}$ ١٢٨ = $لو_{٢}$ ٤٠٩٦

(٧) أثبتي أن : $لو_{٥} \frac{٦٢٥}{٢٥}$ = $لو_{٥}$ ٦٢٥ - $لو_{٥}$ ٢٥

(٨) أثبتي أن : $لو_{٣} \frac{٢١٨٧}{٨١}$ = $لو_{٣}$ ٢١٨٧ – $لو_{٣}$ ٨١

(٩) أثبتي أن : $لو_{١٠}$ ١٠٠٠٠ = ٤ $لو_{١٠}$ ١٠ = ٤

(١٠) أثبتي أن : $لو_{٢} \frac{١}{٣٢}$ = - ٥ $لو_{٢}$ ٢ = - ٥

٧-٤ أهم خواص الدوال اللوغاريتمية

في هذا الفصل، سوف ندرس أهم خواص الدوال اللوغاريتمية. وفي برهان النظريات الثلاث التالية، إثبات لأهم خواص الدوال اللوغاريتمية ، في حدود دراستنا الحالية لها .

نظريـة (٧ – ٥)

إذا كانت $س_{١}$ ، $س_{٢}$ $\in$ $ح^{+}$ ، ا $\in$ $ح^{+}$ - { ١ } ، فإن :

$لو_{ا}$ $س_{١}$ $س_{٢}$ = $لو_{ا}$ $س_{١}$ + $لو_{ا}$ $س_{٢}$.

البرهان :

نفرض أن $لو_{ا} س_١ = ص_١$ ، $لو_{ا} س_٢ = ص_٢$

إذاً $س_١ = ا^{ص_١}$ ، $س_٢ = ا^{ص_٢}$ من التعريف (٧ - ٧)

إذاً $س_١ \cdot س_٢ = ا^{ص_١} \cdot ا^{ص_٢} = ا^{ص_١ + ص_٢}$

إذاً $لو_{ا} س_١ س_٢ = ص_١ + ص_٢$ من التعريف (٧ - ٧)

$= لو_{ا} س_١ + لو_{ا} س_٢$

مثال (٧ - ١٥)

(ا) $لو_{ب} ١٥ = لو_{ب} ٥ \times ٣ = لو_{ب} ٥ + لو_{ب} ٣$

(ب) $لو_{ا} ٦٦ = لو_{ا} ١١ \times ٦ = لو_{ا} ١١ + لو_{ا} ٦$

$= لو_{ا} ١١ + لو_{ا} ٣ + لو_{ا} ٢$

(حـ) $لو_{٢} ٣ + لو_{٢} ٥ + لو_{٢} ٧ = لو_{٢} ٣ \times ٥ \times ٧$

$= لو_{٢} ١٠٥$

(ء) $لو_{٣} ٧ + لو_{٣} ١١ + لو_{٣} ١٠ + لو_{٣} ٤ = لو_{٣} ٧ \times ١١ \times ١٠ \times ٤$

$= لو_{٣} ٣٠٨٠$

نظريـة (٧ - ٦)

إذا كانت $س_١$ ، $س_٢ \in ح^+$ ، $ا \in ح^+ - \{ ١ \}$ ، فإن :

$لو_{ا} \frac{س_١}{س_٢} = لو_{ا} س_١ - لو_{ا} س_٢$

البرهان :

نفرض أن $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}_{١} = \text{ص}_{١}$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}_{٢} = \text{ص}_{٢}$

إذاً $\text{س}_{١} = \text{أ}^{\text{ص}_{١}}$ ، $\text{س}_{٢} = \text{أ}^{\text{ص}_{٢}}$ (لماذا ؟)

إذاً $\dfrac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} = \dfrac{\text{أ}^{\text{ص}_{١}}}{\text{أ}^{\text{ص}_{٢}}} = \text{أ}^{\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢}}$

إذاً $\text{لو}_{\text{أ}}\ \dfrac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} = \text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢}$ (لماذا ؟)

$= \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}_{١} - \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}_{٢}$

مثال (٧ – ١٦)

(أ) $\text{لو}_{٢}\ \dfrac{٧}{٣} = \text{لو}_{٢}\ ٧ - \text{لو}_{٢}\ ٣$

(ب) $\text{لو}_{\text{أ}}\ \dfrac{١١}{٥} = \text{لو}_{\text{أ}}\ ١١ - \text{لو}_{\text{أ}}\ ٥$

(حـ) $\text{لو}_{\text{حـ}}\ ١٥ - \text{لو}_{\text{حـ}}\ ٣ = \text{لو}_{\text{حـ}}\ \dfrac{١٥}{٣} = \text{لو}_{\text{حـ}}\ ٥$.

(ء) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\ ١٧ = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \dfrac{\text{س}}{١٧}$

نظريــة (٧ – ٧)

إذا كانت س $\in$ ح$^+$ ، ؟ $\in$ ح$^+$ - { ١ } ، فإنه لأي عدد حقيقي ن يكون :

لو$_؟$ س^ن = ن لو$_؟$ س .

البرهان :

نفرض أن لو$_؟$ س = ص

إذاً س = ؟^{ص} من التعريف (٧ – ٧)

إذاً س^ن = (؟^{ص})^ن = ؟$^{ن ص}$

إذاً لو$_؟$ س^ن = ن ص من تعريف الدالة اللوغاريتمية

= ن لو$_؟$ س .

مثال (٧ – ١٧)

(؟) لو$_؟$ ١٦ = لو$_؟$ ٢^٤ = ٤ لو$_؟$ ٢

(ب) لو$_٥$ $\sqrt[٣]{٧}$ = لو$_٥$ ٧$^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{١}{٣}$ لو$_٥$ ٧

(حـ) لو$_٤$ $\sqrt[٥]{١١^٢}$ = لو$_٤$ ١١$^{\frac{٢}{٥}}$ = $\frac{٢}{٥}$ لو$_٤$ ١١ .

مثال (٧ – ١٨)

إذا كان ؟ $\in$ ح$^+$ - { ١ } ، فأثبتي أن لو$_؟$ ١ = ٠ ، لو$_؟$ ؟ = ١

الحـــــــل :

نلاحظ أن :

$$\text{لو}_{\text{أ}}\ ١ = \text{ص} \Leftrightarrow ١ = \text{أ}^{\text{ص}} \Rightarrow \text{ص} = ٠$$

لأن الدالة $\text{أ}^{\text{ص}}$ أحادية. إذاً $\text{لو}_{\text{أ}}\ ١ = ٠$

$$\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{أ} = \text{س} \Leftrightarrow \text{أ} = \text{أ}^{\text{س}} \Rightarrow \text{س} = ١$$

لأن الدالة $\text{أ}^{\text{س}}$ أحادية . إذاً $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{أ} = ١$

مثال (٧ – ١٩)

أثبتي أن : $\text{لو}_{١٠} \frac{١٧٠}{٧} - \text{لو}_{١٠} \frac{١٨}{٣٥} + \text{لو}_{١٠} \frac{٧٢}{٣٤} = ٢$

الحـــــــل :

الطرف الأيمن $= \text{لو}_{١٠} \left(\frac{١٧٠}{٧} \div \frac{١٨}{٣٥} \right) + \text{لو}_{١٠} \frac{٧٢}{٣٤}$ (النظرية (٧ – ٦))

$= \text{لو}_{١٠} \frac{١٧٠}{٧} \times \frac{٣٥}{١٨} \times \frac{٧٢}{٣٤}$ (النظرية (٧ – ٥))

$= \text{لو}_{١٠} ١٠٠$

$= \text{لو}_{١٠} ١٠^{٢}$

$= ٢\ \text{لو}_{١٠} ١٠$ من النظرية (٧ – ٧))

$= ٢$ من المثال (٧ – ١٨)

= الطرف الأيسر .

مثال (٧ – ٢٠)

إذا كان الاساس ١٠ ، فأثبتي أن :

لو $\frac{٤٠}{٩}$ + ٢ (٢ لو ٥ + لو ٦) = ٥

الحـــــل :

الطرف الأيمن = لو $\frac{٤٠}{٩}$ + ٤ لو ٥ + ٢ لو ٦

= لو $\frac{٤٠}{٩}$ + لو$٥^{٤}$ + لو $٦^{٢}$ من النظرية (٧ – ٧)

= لو $\frac{٤٠}{٩}$ × $٥^{٤}$ × ٣٦   من النظرية (٧ – ٥)

= لو ١٠٠٠٠٠

= لو $١٠^{٥}$

= ٥ لو ١٠   (لماذا ؟)

= ٥   لأن لو$_{١}$ ١٠ = ١

= الطرف الأيسر .

تمارين (٧ – ٤)

(١) اختصري إلى أبسط صورة :

(أ) لو$_{٧}$ ١٥ + لو$_{٧}$ ٣٥ – لو$_{٧}$ ٢١

(ب) لو$_{٤}$ ٥٤ – ٢ لو$_{٤}$ ٣ + لو$_{٤}$ ١٢ .

(حـ) لو$_{س}$ ٩ – لو$_{س}$ ٧٢ + لو$_{س}$ ٨١ .

(٢) إذا كان الأساس ١٠ ، فأثبتي أن :

(أ) لو $\frac{٢٥٦}{٣}$ + ٣ لو $\frac{٥}{٣}$ + لو $\frac{٨١}{٣٢}$ = ٣ .

(ب) ٣ لو ٠,٠٦ - لو ٢١٦ + لو ٨ + لو ١٢٥ = -٣

(حـ) لو $\frac{٢٤٥}{٣٧٨}$ – لو $\frac{٤٩}{٨١}$ + لو $\frac{١٤}{١٥}$ = صفر .

(ء) لو ٣,٤٣ + لو ١٢٥ – ٣ لو ١,٤ + لو ٠,٦٤ = ٢

(هـ) $\frac{\text{لو ٨ - ٣ لو ٩}}{\text{لو ٤ - ٤ لو ٣}} = \frac{٣}{٢}$.

(٣) إذا علمت أن لو ٢٤ = ١,٣٨٠٢ ، لو ٦ = ٠,٧٧٨٢ فأوجدي لو ٤ .

(٤) إذا علمت أن لو$_{١٠}$ ٥ = ٠,٦٩٩٠ ، لو$_{١٠}$ ٦ = ٠,٧٧٨٢ فأوجدي قيمة لو$_{١٠}$ ٣٠ وكذلك قيمة لو$_{١٠}$ ٢٥ .

(٥) إذا علمت أن $لو_{١٠} ٢ = ٠,٣٠١٠$ ، $لو_{١٠} ٣ = ٠,٤٧٧١$ فأوجدي قيمة كل من :

(أ) $لو_{١٠} ٦$ (ب) $لو_{١٠} \frac{٥}{٦}$ (حـ) $لو_{١٠} \frac{٢٧}{٦٤}$

(ء) $لو_{١٠} ٠,٣$ (هـ) $لو_{١٠} ٠,٠٢$ (و) $لو_{١٠} ٠,٠٠٦$

٧-٥ اللوغاريتمات العشرية

تسمى اللوغاريتمات التي أساسها ١٠ **باللوغاريتمات العشرية أو العادية** ، وتستخدم في تبسيط العمليات الحسابية التي تقابلنا في الحياة اليومية . وحيث أننا سنستخدم اللوغاريتمات العشرية فيما يلي ، فإننا لن نكتب الأساس ، إلا إذا استخدمنا لوغاريتما بالنسبة لأساس يختلف عن عشرة .

مثال (٧ – ٢١)

$١٠^{٣} = ١٠٠٠ \Leftrightarrow لو ١٠٠٠ = ٣$

$١٠^{٢} = ١٠٠ \Leftrightarrow لو ١٠٠ = ٢$

$١٠^{١} = ١٠ \Leftrightarrow لو ١٠ = ١$

$١ = ١٠^{٠} \Leftrightarrow لو ١ = ٠$

$٠,١ = ١٠^{-١} \Leftrightarrow لو ٠,١ = -١$

$٠,٠١ = ١٠^{-٢} \Leftrightarrow لو ٠,٠١ = -٢$

من هذا المثال نستنتج أن :

(أ) لوغاريتم الواحد يساوي صفراً .

(ب) لوغاريتمات الأعداد التي تكبر الواحد موجبة .

(حـ) لوغاريتمات الأعداد التي تصغر الواحد والأكبر من الصفر سالبة .

(ى) إذا كان العدد قوة صحيحة للأساس ١٠ ، كان لوغاريتمه عدداً صحيحاً فمثلاً :

لو ١٠٠ = ٢ لأن ١٠٠ = $١٠^{٢}$ ،

لو ٠,٠٠١ = - ٣ لأن ٠,٠٠١ = $١٠^{-٣}$

وعلى العكس ، إذا كان اللوغاريتم عدداً صحيحاً كان العدد المقابل قوة صحيحة للأساس ١٠

(هـ) إذا كان العدد محصوراً بين قوتين صحيحتين ، متتاليتين للأساس ١٠ ، كان لوغاريتمه عدداً كسرياً محصوراً بين الأسين .

فمثلاً : العدد ٣٥٧ محصور بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ . لذلك فإن لوغاريتمه ينحصر بين ٢ ، ٣ أي أن :

لو ٣٥٧ = ٢ + كسر عشري موجب .

وكذلك العدد ٠,٩٥ ينحصر بين ٠,١ ، ١ . لذلك فإن لوغاريتمه أصغر من الصفر وأكبر من – ١ ، أي يساوي كسراً عشرياً سالباً . وقد جرت العادة في الحسابات اللوغاريتمية ألا نستعمل الكسور العشرية السالبة . لذلك :

لو ٠,٩٥ = - ١ + كسر عشري موجب .

وتكتب بالشكل :

لو ٠,٩٥ =٣ + كسر عشري موجب .

وجدنا مما سبق أن لورغايتمات الأعداد يمكن حصرها بين قوتين صحيحتين متتاليتين ، ولوغاريتماتها محصورة بين عددين صحيحين ، ونكتبها بشكل عدد صحيح مضافاً إليه كسراً عشرياً موجباً . أما الكسر العشري ، فيستخرج من جداول خاصة سنبحثها مفصلاً .

ولتعيين القسم الصحيح (ويسمى **العدد البياني**) للوغاريتم عدد ، فإننا نميز حالتين :

(١) العددالمعطى أكبر من الواحد :

من المثال (٧ – ٢١) السابق نجد أن :

لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين ١ ، ١٠ = ٠ + كسر عشري موجب .

لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ = ١ + كسر عشري موجب .

لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ = ٢ + كسر عشري موجب .

وهكذا ٠٠٠٠

ونستنتج من ذلك القاعدة التالية :

القسم الصحيح (أو العدد البياني) في لوغاريتم أي عدد أكبر من الواحد ، هو عدد موجب ينقص بواحد عن عدد المنازل الصحيحة في العدد الأصلي .

صحيحين ، وعلى ذلك فإن : العدد البياني للوغاريتمه = ٢ – ١ = ١ .

وهكذا نعد الأرقام الصحيحة للعدد وننقص منها واحداً ، فنحصل على العدد البياني للوغاريتم العدد الأكبر من الواحد .

وعلى العكس ، إذا كان العدد البياني من لوغاريتم أي عدد يساوي حـ (حيث حـ عدد صحيح موجب) فعدد المنازل الصحيحة للعدد يزيد واحداً عن العدد البياني أي يساوى حـ + ١

مثلاً : إذا كان لو ب = ٣ + كسر عشري موجب ، فإن :

عدد الأرقام الصحيحة للعدد ب = ٣ + ١ = ٤ .

(٢) إذا كان العدد المعطى اصغر من الواحد واكبر من الصفر فإننا نلاحظ من المثال (٧ – ٢١) أيضاً أن :

لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين ٠,١ ، ١ = ١̄ + كسر عشري موجب .

لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين ٠,٠١ ، ٠,١ = ٢̄ + كسر عشري موجب ،

لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين ٠,٠٠١ ، ٠,٠١ = ٣̄ + كسر عشري موجب .

وهكذا ....

من ذلك نستنتج القاعدة الآتية :

العدد البياني للوغاريتم عدد أصغر من الواحد ، هو عدد سالب قيمته المطلقة تزيد بواحد عن عدد الأصفار الواقعة عن يمين الفاصلة العشرية مباشرة .

فمثلاً : العدد ٠,٥٤٠٢ لا يحتوي أصفاراً عن يمين الفاصلة العشرية مباشرة إذن العدد البياني للوغاريتمه = ١̄ .

والعدد ٠,٠٥٧ يحتوي صفراً واحداً عن يمين الفاصلة العشرية مباشرة إذن العدد البياني للوغاريتمه ٠,٠٥٧=٣̄ .

وعلى العكس ، إذا كان :

لو ب =٣̄ + كسر عشري موجب ، فإن ب أصغر من الواحد ، وأول رقم غير صفري فيه يأتي بعد صفـــرين من الفاصلة العشرية. وسنبحـــث ذلك مفصلاً عند بحث الأعداد المقابلة للوغاريتمات .

ملاحظة (٧ – ٦)

إذاضربناعـــدداًفيقوى العشـــرة،أوقسـمناه عليها،فلايتغـــيرالقســـم العشـــري للوغاريتم هذا العدد .

مثال (٧ – ٢٢)

بيني أن القســـم العشـــري للوغـــاريتـمات الأعـــــــــداد ٣٥٠ ، ٣,٥ ، ٠,٣٥ ، ٣٥

لا يتغير.

الحــــل :

لو ٣٥٠ = لو ٣٥ + لو ١٠ = لو ٣٥ + ١ .... (١)

لو ٣,٥ = لو ٣٥ - لو ١٠ = لو ٣٥ - ١ .... (٢)

لو ٠,٣٥ = لو ٣٥ - لو ١٠٠ = لو ٣٥ -٢ .... (٣)

فإذا كان لو ٣٥ = ١,٥٤٤١

من (١) نستنتج أن : لو ٣٥٠ = ١,٥٤٤١ + ١ = ٢,٥٤٤١ .

من (٣) نستنتج أن : لو ٠,٣٥ = ١,٥٤٤١ -٢ = $\overline{١}$,٥٤٤١

أي أن الكسر العشري يبقى كما هو . وللبحث عن الكسور العشرية للوغاريتمات الأعداد ٣٥٠، ٣,٥ ، ٠,٣٥ ، نصرف النظر عن موضع الفاصلة العشرية . كما نصرف النظر عن الأصفار التي على يمين العدد .

تمارين (٧ – ٥)

(١) أوجدي العدد البياني في لوغاريتمات الأعداد الآتية :

٣,٥٤٧ ، ٥٧٠,٣ ، ١٣٥٤٢ ، ٠,٢٠٠٣ ،

٨ ، ٢١,٠٠٢ ، ١٠,٠٥ ، ٢١٣,١ ،

١٦٥٢٠ ، ٠,٠٠١٨ ، ٠,٧٠٠٢ ، ٠,٠٥٧ ،

١٨٠٢٣ ، ١٣,٢٥ ، ٠,٩٣٩٢ ، ١,٠٠٠٤

(٢) أي الأعداد البيانية في اللوغاريتمات التالية صواب ؟

(أ) لو ٤٢٩,٢ = ٣,٦٣٢٧ (ب) لو ١٠١,١ = ٢,٠٠٥٨

(جـ) لو ٠,٠٨٢٤ = $\overline{٢}$,٩١٥٩ (د) لو ٤,٦٢٥ = ١,٦٦٥١

(هـ) لو ٠,٠٣٥٢ = $\overline{١}$,٥٤٦٥ (و) لو ٠,٠٠٤٢٩٢ = $\overline{٣}$,٦٣٢٧

(٣) (أ) إذا كان لوس ينحصر بين ٥ ، ٦ . فاذكري عدد أرقام الجزء الصحيح في العدد س .

(ب) إذا كان ٣ < لو ب < ٤ . فاذكري عدد أرقام الجزء الصحيح في العدد ب .

(٤) (أ) إذا كان لو ب = ٣,٣٤٦٧ ، لو حـ = ٢,٣٤٦٧ ، فأي العددين ب ، حـ أكبر من الآخر ؟

(ب) إذا كان لو س = ١,٤٦٢٣ ، لو ص = ٣,٤٦٢٣ فاذكري قيمة ص بدلالة س .

(٥) إذا كان لو ٦٨,٢٦ = ١,٨٣٤٢ ، فاحسبي :

(أ) لو ٦٨٢٦ (ب) لو ٦٨٢,٦

(حـ) لو ٠,٦٨٢٦ (ى) لو ٦,٨٢٦

(هـ) لو ٠,٠٦٨٢٦ (و) لو ٠,٠٠٠٦٨٢٦

٧-٦ استعمال جداول اللوغاريتمات

لقد وجدنا أن لوغاريتمات الأعداد تتكون بصفة عامة من عدد صحيح وكسر عشري موجب، ووجدنا أنه يمكن معرفة العدد الصحيح، بالاعتماد على القاعدتين المذكورتين في البند السابق. أما الكسر العشري للوغاريتم العدد، فيمكن الحصول عليه من جداول خاصة ، تسمى جداول لوغاريتمات الأعداد . وهناك جداول قربت الأجزاء العشرية للوغاريتمات الأعداد فيها لسبعة أرقام عشرية ، أو لستة أرقام عشرية ، أو خمسة أرقام عشرية ، وهكذا .. وسنكتفي هنا بالجداول المقربة لأربعة أرقام عشرية . والجدول (٧ – ١) يبين جزءاً من جداول لوغاريتمات الأعداد. والأمثلة التالية توضح كيفية الحصول على الجزء العشري للوغاريتم العدد من الجداول.

مثال (٧ – ٢٣)

احسبي لو ٢٤٧ .

الحـــــل :

العـدد البياني للوغاريتم العـدد = ٢ .

لإيجاد الجزء العشري ، نبحث عن العدد ٢٤ في العمود الأول من جدول لوغاريتمات الأعداد ، وعلى نفس السطر الواقع فيه العدد ٢٤ ، نجد تحت العمود الذي يعلوه العدد ٧ ، الجزء العشري المطلوب وهو إذاً ٣٩٢٧ انظري الجدول (٧ – ١) لذا فإن لو ٢٤٧ = ٢,٣٩٢٧ .

جزء من جداول لوغاريتمات الأعداد

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	الفـــروق								
											١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٢٤	٣٨٠٢	٣٨٢٠	٣٨٣٨	٣٨٥٦	٣٨٧٤	٣٨٩٢	٣٩٠٩	٣٩٢٧	٣٩٤٥	٣٩٦٢	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٢	١٤	١٦
٢٥	٣٩٧٩	٣٩٩٧	٤٠١٤	٤٠٣١	٤٠٤٨	٤٠٦٥	٤٠٨٢	٤٠٩٩	٤١١٦	٤١٣٣	٢	٣	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥
٢٦	٤١٥٠	٤١٦٦	٤١٨٣	٤٢٠٠	٤٢١٦	٤٢٣٢	٤٢٤٩	٤٢٦٥	٤٢٨١	٤٢٩٨	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١١	١٣	١٥
٢٧	٤٣١٤	٤٣٣٠	٤٣٤٦	٤٣٦٢	٤٣٧٨	٤٣٩٣	٤٤٠٩	٤٤٢٥	٤٤٤٠	٤٤٥٦	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٣	١٤

جدول (٧ – ١)

أرقام العمود الأول تدل على الرقمين الأولين من جهة اليسار للعدد المطلوب حساب لوغاريتمه ، بصرف النظر عن الفاصلة العشرية إن وجدت في العدد .

وأما الأعمدة العشرية التالية فهي خاصة بالرقم الثالث ، وأعمدة الفروق خاصة بالرقم الرابع .

مثال (٧ – ٢٤)

احسبي لو ٢٦,٥

الحـــــل :

العدد البياني = ١

لإيجاد الجزء العشري ، نصرف النظر عن العلامة العشرية ، ونبحث عن العدد ٢٦ في العمود الأول . وعلى نفس السطر ، نجد تحت العمود ، الذي يعلوه العدد ٥ الكسر العشري المطلوب وهو ٤٢٣٢ .

إذاً لو ٢٦,٥ = ١,٤٢٣٢ .

نستنتج مباشرة أن :

لو ٠,٢٦٥ = ١,٤٢٣٢ ، لو ٠,٠٠٢٦٥ = ٣,٤٢٣٢ ،

لو ٢٦٥٠ = ٣,٤٢٣٢ ، لو ٢,٦٥ = ٠,٤٢٣٢

مثال (٧ – ٢٥)

احسبي لو ٢٥٦٤

الحـــــل :

العدد البياني = ٣ .

لإيجاد الكسر العشري ، نبحث عن ٢٥ في العمود الأول . وعلى نفس السطر ، نجد تحت العمود ٦ الجزء العشري وهو ٤٠٨٢ . وعلى نفس السطر من جدول الفروق ، وتحت العمود ٤ ، نجد العدد ٧ ، فنضيفه الى ٤٠٨٢ ، فيصبح الجزء العشري هو ٤٠٨٩ . ويكون :

لو ٢٥٦٤ = ٣,٤٠٨٩

مثال (٧ – ٢٦)

احسبي لو ٠,٢٦

الحـــــل :

العدد البياني = $\bar{1}$.

لإيجاد الكسر العشري ، نصرف النظر عن الفاصلة العشرية ، ونبحث عن لو ٢٦٠ (لماذا ؟) . أي نبحث عن ٢٦ في العمود الأول ، وعلى نفس السطر ، نجد تحت العدد (٠) القسم العشري المطلوب وهو ٤١٥٠ ويكون :

لو ٠,٢٦ = $\bar{1}$,٤١٥٠

مثال (٧ – ٢٧)

احسبي لو ٧ من جداول اللوغاريتمات .

الحـــــل :

العدد البياني = ٠

لإيجاد الجزء العشري نبحث عن لو ٧٠٠ (لماذا ؟) . أي نبحث عن العدد ٧٠ في العمود الأول . وعلى نفس السطر ، نجد تحت العمود الذي يعلوه العدد (٠) ، الجزء العشري المطلوب ، وهو : ٨٤٥١ . ويكون :

لو ٧ = ٠,٨٤٥١

احسبي لو ٠,٧ ، لو ٠,٠٧ ، لو ٧٠

مثال (٧ – ٢٨)

احسبي لو ٢٥٦,٣٨ .

العدد البياني = ٢ .

لإيجاد الجزء العشري ، نقرب العدد إلى أربعة أرقام ، فيكون

٢٥٦,٣٨　　　٢٥٦,٤

ثم نتبع ما جاء في المثال (٧ – ٢٥) ، فنجد أن :

لو　٢٥٦,٣٨　　　٢,٤٠٨٩

والآن لِنرَ كيف نوجد عدداً عُلِمَ لوغاريتمه .

من المعلوم أن اللوغاريتم المعطى يحتوي على عدد صحيح وهو العدد البياني ، وجزء عشري وهو الكسر العشري الموجب. والعدد البياني يدل على عدد الأرقام الصحيحة فى العدد ، أي يدل على موضع الفاصلة العشرية .

أما الكسر العشري

الموجب، فمنه يمكن إيجاد الأرقام باستخدام جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات.

والأمثلة الآتية توضح هذه الفكرة .

مثال (٧ – ٢٩)

أوجدي قيمة س ، إذا كان لو س = ١,١٩٢٧

الحـــــــــل :

نبحث في جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات ، المبين جزء منه في الجدول (٧ – ٢) أمام ٠,١٩ تحت العمود ٢ ، ونضيف الفرق الموجود تحت العمود ٧ في نفس الصف ، فنحصل على :

جزء من جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات
جدول (٧ – ٢)

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	الفروق								
											١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠١	١٠٢٣	١٠٢٦	١٠٢٨	١٠٣٠	١٠٣٣	١٠٣٥	١٠٣٨	١٠٤٠	١٠٤٢	١٠٤٥	٠	٠	١	١	١	١	٢	٢	٢
.																			
٠,٠٣								١٠٨٩							١				
.																			
.																			
.																			
.																			
٠,١٩	١٥٤٩	١٥٥٢	١٥٥٦	١٥٦٠	١٥٦٣	١٥٦٧	١٥٧٠	١٥٧٤	١٥٧٨	١٥٨١	٠	١	١	١	٢	٢	٣	٣	٣

كيفية استعمال الجداول المقابلة للوغاريتمات :

أرقام العمود الأول ، تدل على الرقمين العشريين الأولين من الجزء العشري للوغاريتم المعطى . والأعمدة العشرة التالية ، خاصة بالرقم العشري الثالث . وأعمدة الفروق ، خاصة بالرقم العشري الرابع .

لا تختلف طريقة البحث فيها عن جداول اللوغاريتمات .

وبما أن العـــدد البياني في لو س هو ١ ، فلابد أن س يحـــتوي على

رقمـــين

صحيحين ، ويكون :

س = ١٥,٥٩ .

مثال (٧ – ٣٠)

أوجدي العدد الذي لوغاريتمه هو :

(؟) ١,٠٣٧٥ (ب) ٠,٠٣٧٥ (حـ) ٢,٠٣٧٥

الحــــــــل :

في جميع الحالات ، ننظر في جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات أمام ٠,٠٣

وتحت العمود ٧ ، ونضيف الفرق الموجود تحت العمود ٥ في نفس السطر، فنحصل

على :

١٠٨٩ + ١ = ١٠٩٠ .

ثم نضع العلامة العشرية حسب العدد البياني ، والأجوبة هي :

(؟) ١٠,٩٠

(ب) ١,٠٩٠

تمارين (٧ – ٦)

(١) احسبي ما يأتي باستخدام الجداول :

(أ) لو ٩ (ب) لو ٤,٨ (حـ) لو ٠,٣٧

(ء) لو ٢٣١ (هـ) لو ٣,٩٩ (و) لو ٤٢,٣٧

(ز) لو ٩٣٥٢ (ح) لو ٠,٨٤٢١ (ط) لو ٣,٠٠٦٣

(ى) لو ٧٥٤٣٠٠ (ك) لو ٢٨,٤٣٦ (ل) لو ٠,٠٨٣٠٥

(٢) في كل مايلي ، أوجدي الأعداد التي لوغاريتماتها العشرية هي :

(أ) ١,٣٢٠ (ب) ٣,١٤٥ (حـ) ٠,٧٨٣

(ء) ٢,٠١٧٩ — (هـ) ١,٠٠٣٥— (و) ٤,٠٠٢٨

(ز) ٠,٧٢٣١ (ح) ٢,٠٣٨٨ (ط) ٢,٠٢٨٨ —

(ى) ٤,١٣٣٦ (ك) ٠,٠٠٥٥٦ (ل) ٣,١٤

(٣) احسبي قيمة س إذا كان :

(أ) لو س = ٢,٧٣ (ب) لو س = ٠,٨٧٠٣

(حـ) لو س = ١,٨ (ء) لو س = ٢,٠٠٣٥

(هـ) لو س = ٠,٠٤١٨ (و) لو س = ٣,٦٣٠٨

(٤) باستعمال الجداول الرياضية احسبي ما يأتي :

(أ) $١٠^{٢,٤٣٢}$ (ب) $١٠^{١,٧}$

(حـ) $١٠^{١,٢٤٣٨}$ — (ء) $١٠^{٢,٠٠٣٢}$ —

٧ - ٧ العمليَّات على الأعداد اللوغاريتمية

سندرس الآن بعض العمليات التي تجري على لوغاريتمات الأعداد.

وسنبدأ بجمع اللوغاريتمات :

لجمع لوغاريتمات الأعداد ، نجمع الأجزاء العشرية كما نجمع الأعداد.

وما ينتج من جمعها من وحدات صحيحة ، نضيفه إلى المجموع الجبري للأعداد الصحيحة .

مثال (٧ – ٣١)

اجمعي ١,٩٢٣٤ + ٣,٥٢٧٣ + ٢,٤٥٦٢

الحـــــــل :

نجمع اولاً الكسور العشرية :

٠,٩٢٣٤ + ٠,٥٢٧٣ + ٠,٤٥٦٢ = ١,٩٠٦٩

نضيف العدد الصحيح الناتج إلى المجموع الجبري للأعداد الصحيحة .

فنحصل على :

١ + ١ + (- ٣) + (- ٢) = - ٣

إذاً ١,٩٢٣٤ + ٣,٥٢٧٣ + ٢,٤٥٦٢ = ٣,٩٠٦٩

مثال (٧ – ٣٢)

اضربي ٥ × $\bar{٢}$,٣٦٧٤

الحــــــل :

نضرب أولاً العدد في الجزء العشري ، فيكون :

٥ × ٠,٣٦٧٤ = ١,٨٣٧٠

ثم نضرب العدد في العدد البياني ، فيكون :

٥ × $\bar{٣}$ = - ١٠

نجمع الأعداد الصحيحة جمعاً جبرياً ، فنحصل على :

- ١٠ + ١ = - ٩   ويكون :

٥ × $\bar{٢}$,٣٦٧٤ = $\bar{٩}$,٨٣٧٠

كما يمكن قسمة لوغاريتم على عدد ، وفي هذه الحالة علينا أن نميز بين حالتين :

(١) إذا كان العدد البياني يقبل القسمة على المقسوم عليه : في هذه الحالة

نقسم

العدد البياني على المقسوم عليه تقسيماً جبرياً ، ونقسم الكسر العشري

على

مثال (٧ – ٣٣)

$$\frac{\overline{٢},٥٣٢٦}{٢} = \frac{-٢}{٢} + \frac{٠,٥٣٢٦}{٢}$$

$$= -١ + ٠,٢٦٦٣$$

$$= \overline{١},٢٦٦٣$$

(٢) إذا كان العدد البياني لا يقبل القسمة على المقسوم عليه :

مثال (٧ – ٣٤)

احسبي $\frac{\overline{٣},٧٦٤٧}{٥}$

الحـــــــــل :

نبحث عن العدد الأصغر مباشرة من (- ٣) ويقبل القسمة على ٥ (المقسوم عليه) . لذلك نطرح ٢ من العدد البياني حتي يكون الناتج (-٥) ، على أن نضيف (+ ٢) إلى الكسر العشري ، فيصبح ٢,٧٦٤٧ ، وتصبح العملية كما يلي :

$$\frac{\overline{٣},٧٦٤٧}{٥} = \frac{-٣-٢ + ٠,٧٦٤٧ + ٢}{٥}$$

$$= \frac{-٥ + ٢,٧٦٤٧}{٥}$$

$$= \frac{-٥}{٥} + \frac{٢,٧٦٤٧}{٥}$$

$$= -١ + ٠,٥٥٢٩٤$$

$$= \overline{١},٥٥٢٩٤$$

تمارين (٧ – ٧)

احسبي ناتج كل من العمليات الآتية :

(١) ٥,٤٣٢١ + ١,٣٦٢١ + ٢,٩٥٢١ .

(٢) ٠,٩٢٠٩ + ١,٤٣٨١ + ١,١٧٢٣

(٣) ١,٣٧٢٨ + ٢,٧٢٣٥ – ١,٨٧٤٣

(٤) ٢,٤٣٨٥ – ٣,٣٧٢٨ + ١,٤٣٢٢

(٥) ٤,٢٠٠٨ + ١,٠١٢٣ – ٢,٠٧٨٥

(٦) ٥ × ١,٠٢١٣ –

(٧) ٣ × ١,١٠٢٨

(٨) ٢ × ٢,٩٤٠٨ –

(٩) $\frac{١}{٥}$ × ١٠,٠٣٤٥ –

(١٠) $\frac{١}{٤}$ × ٣,٣٩٣٢ –

(١١) $\frac{١}{٣}$ × ٢,٠٢٣٦ –

(١٢) $\frac{١}{٢}$ × ٣,٢٥١٨

(١٣) $\frac{١}{٢} \times ٣,٢٥١٨$ —

(١٤) $٢ \times ٢,١٤٧٣ + \frac{١}{٣} \times ١,٤٩٢٣ + ١,٩٣\overline{٢١}$. —

٧ - ٨ تطبيقات اللوغاريتمات في الحساب

تستخدم اللوغاريتمات في تبسيط العمليات الحسابية كالتي نجدها في

القوى

والجذور الصم والعمليات الحسابية للمساحات والحجوم . وغيرها .

مثال (٧ – ٣٥)

احسبي قيمة $(١٣,٨٤)^{٨}$

الحـــــــــــل :

نفرض ان س = $(١٣,٨٤)^{٨}$

إذاً لو س = لو $(١٣,٨٤)^{٨}$

= ٨ لو ١٣,٨٤

= ٨ × ١,١٤١٢

= ٩,١٢٩٦

إذاً س = ١٣٤٨×١٠^{٦}

مثال (٧ – ٣٦) $\sqrt{}$

الحـــــــــــــل :

نفرض أن س = $\sqrt[5]{٤٥,٣٢}$

إذاً لـو س = لو $\sqrt[5]{٤٥,٣٢}$

= لـو (٤٥,٣٢)$^{\frac{١}{٥}}$

= $\frac{١}{٥}$ لـو ٤٥,٣٢

= $\frac{١}{٥}$ x ١,٦٥٦٣ من جداول لـوغاريتمات الأعـداد

٠,٣٣١٢ ≃ ٠,٣٣١٣

إذاً س = ٢,١٤٤ من جـدول الأعـداد المقـابلـة للـوغاريتمات

مثال (٧ - ٣٧)

احـسـبـي قـيـمـة $\sqrt{٠,٣٤٨٢}$ X $\sqrt[3]{٥,٣٧٨}$

الحــــــــــــل :

نفـرض أن المـقـدار = س .

إذاً لو س = لو $\left(\sqrt{٠,٣٤٨٢} \times \sqrt[٣]{٥,٣٧٨} \right)$

$= \text{لو} \left((٠,٣٤٨٢)^{\frac{١}{٢}} \times (٥,٣٧٨)^{\frac{١}{٣}} \right)$

$= \text{لو} (٠,٣٤٨٢)^{\frac{١}{٢}} + \text{لو} (٥,٣٧٨)^{\frac{١}{٣}}$

$= \frac{١}{٢} \text{ لو } ٠,٣٤٨٢ + \frac{١}{٣} \text{ لو } ٥,٣٧٨$

$= \frac{١}{٢} \times \bar{١},٥٤١٩ + \frac{١}{٣} \times ٠,٧٣٠٦$

$= \bar{١},٧٧٠٩٥ + ٠,٢٤٣٥٣$

$= ٠,٠١٤٤٨$

$\simeq ٠,٠١٤٥$

إذاً س = ١,٠٣٤

مثال (٧ - ٣٨)

احسبي قيمة المقدار $\frac{(٤٧,٣٢)^{٢} - (١٥,٢٧)^{٢}}{(٣٤,٧٢)^{٢}}$

الحـــــــــــــــل :

نفرض أن س = $\frac{(٤٧,٣٢)^{٢} - (١٥,٢٧)^{٢}}{(٣٤,٧٢)^{٢}}$

=

$$= \frac{٦٢,٥٩ \times ٣٢,٠٥}{(٣٤,٧٢)^{٢}}$$

لو س = لو ٦٢,٥٩ + لو ٣٢,٠٥ - ٢لو ٣٤,٧٢

= ١,٧٩٦٥ + ١,٥٠٥٨ - ٢ × ١,٥٤٠٦

= ٣,٣٠٢٣ - ٣,٠٨١٢

= ٠,٢٢١١

إذاً س = ١,٦٦٣

مثال (٧-٣٩)

احسبي قيمة المقدار $\frac{٠,٧٣٥٢ \times (٤,٠٠٧)^{٣}}{٠,٨٣٤٢ + \sqrt[٣]{٨٠٩,٦}}$

الحـــــــــل :

نوجد أولاً قيمة $\sqrt[٣]{٨٠٩,٦}$

$$\text{لو}\sqrt[٣]{٨٠٩,٦} = \frac{١}{٣} \text{ لو } ٨٠٩,٦$$

$$= \frac{١}{٣} \times ٢,٩٠٨٢$$

$$= ٠,٩٦٩٤$$

إذاً $\sqrt[٣]{٨٠٩,٦} = ٩,٣١٩$

ونفرض س = $\frac{٠,٧٣٥٢ \times (٤,٠٠٧)^{٣}}{٠,٨٣٤٢ + ٩,٣١٩٠}$

$$= \frac{٠,٧٣٥٢ \times (٤,٠٠٧)^{٣}}{١٠,١٥٣٢}$$

إذاً لو س = لو ٠,٧٣٥٢ + ٣ لو ٤,٠٠٧ - لو ١٠,١٥٣٢

= $\overline{\text{١}}$,٨٦٦٤ + ٣ × ٠,٦٠٢٩ - ١,٠٠٦٤

= $\overline{\text{١}}$,٨٦٦٤ + ١,٨٠٨٧ - ١,٠٠٦٤

= ٠,٦٦٨٧

إذاً س = ٤,٦٦٣

ملاحظة (٧-٧)

علينا أن ندرك بأن نتائج الحسابات السابقة التي تستخدم اللوغاريتمات العشرية هي في الحالة العامة تقريبية فلوغاريتم العدد (الموجب) س يحتوي في الحالة العامة على جزء عشري غير منتهٍ (مالم يكن العدد س بالشكل $\text{١٠}^{\text{ن}}$ وحيث ن ∈ ح) .

واللوغاريتمات التي تعطينا إياها جداول اللوغاريتمات العشرية تكون مقربة كما سبق وذكرنا, إلى بضعة أرقام عشرية. وكلما ازداد عدد هذه الأرقام كلما ازدادت دقة الحسابات. ونذكر بأن اللوغاريتمات في الجدول (٧-١) مقربة لأربعة أرقام عشرية فقط.

تمارين (٧ - ٨)

باستخدام جداول اللوغاريتمات أوجدي قيمة كل مما يأتي :

(١) ١٥٠٠ × $(\text{١,٠٥})^{\text{٤}}$

(٢) $(\text{١,٠٤٥})^{\text{٨}}$

(٣) $(\text{١٢,٤٣})^{\text{٤}}$

(٤) $\sqrt[\text{٥}]{\text{٧١,٣٢}}$

(٥) $\sqrt[\text{٣}]{(\text{٣,١٢})^{\text{٢}}}$

(٦) $\sqrt[\text{٤}]{\text{٠,٠٠٣٨}}$

(٧) $٧٣,٤٢ \times ٠,٠٤٦٢ \times ٠,٥١٤٣$

(٨) $٥,١٨٣ \times \sqrt[٣]{٧,٢٨}$

(٩) $(٢,٧٢٥)^{٢} \times \sqrt{٥,٦١٥}$

(١٠) $$\frac{٧٨٤,٦ \times ٠,٠٤٣١}{٢٨,٢٣}$$

(١١) $$\frac{٧١,٤٥ \times ٠,٣٢٤}{(٢,١٥٣)^{٣}}$$

(١٢) $$\frac{٩٧,٣٢ \times \sqrt{٢١,٢٥}}{١٥,٦٤}$$

(١٣) $$\frac{(١٢,٤٣)^{٢} \times \sqrt[٣]{٠,٠٠٩٧٨}}{(٣,٢٢)^{٣}}$$

(١٤) $$\frac{(١,٤٧٥)^{٣}}{(٢,٧٤٥)^{٢}}$$

(١٥) $$\sqrt[٣]{\frac{(٩,٢٧)^{٣} + (١٤,٣٧)^{٢}}{(٣٥,٤٤)^{٢} + ٠,٧٣}}$$

(١٦) $$\frac{\sqrt{٠,٠٠٣٦٥٤} \times (١٨,٣٧)^{٣}}{(٨,٧٢٤)^{٤} \times \sqrt[٣]{٧٢٣,٨}}$$

الخلاصة

- الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية دوال من نوع التقابل
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات للدوال الأسية .

$د_أ$: ح ⟵ $ح^+$ ، تطبيق معرف بالقاعدة :

$د_أ$: س ⟼ $د_أ$ (س) = $أ^س$

حيث $د_أ$ هي الدالة الأسية للأساس أ .

عرفنا الدالة اللوغاريتمية كالآتي :

أذا كانت أ ∈ $ح^+$ - { ١ } فإن :

ص = $لو_أ$ س ⟺ س = $أ^ص$

$لو_هـ$ أ ب = $لو_هـ$ أ + $لو_هـ$ ب

$لو_هـ \frac{أ}{ب}$ = $لو_هـ$ أ - $لو_هـ$ ب

$لو_هـ$ $أ^ن$ = ن $لو_هـ$ أ

درسنا اللوغاريتمات العشرية واستنتجنا القاعدتين :

(١) العدد البياني في لوغاريتم أي عدد أكبر من الواحد هو عدد موجب ، ينقص بواحد عن عدد المنازل الصحيحة في العدد الأصلي.

(٢) العدد البياني في لوغاريتم أي عدد أصغر من الواحد هو عدد سالب ، قيمته المطلقة تزيد بواحد عن عدد الأصفار الواقعة عن يمين الفاصلة العشرية ، كما وجدنا أن الكسر العشري في لوغاريتم أي عدد يكون موجباً دائماً.

تمارين عامة

إذا كانت أ ، ب ، ن ، م $\in$ ح ، فأكملي ما يأتي بحيث يكون التقرير الناتج صحيحاً :

(١) $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times \dots \quad \dots\dots$

(٢) $أ^{٠} = \dots$ (حيث $أ \neq ٠$) .

(٣) $أ^{م} \times أ^{ن} = \dots$

(٤) $(أ^{م})^{ن} = \dots$

(٥) $(أ ب)^{ن} = \dots$

(٦) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \dots$ حيث ....

(٧) إذا كان أ ، ب ، م $\in$ ح$^{+}$ ، م $\neq$ ١ ، فأكملي :

(أ) إذا كان $م^{أ} =$ ب ، فإن $لو_{م}$ .... = ...

(ب) $لو_{م}$ أ ب = ...

(حـ) لو $\frac{أ}{ب}$ = ...

(ء) لو$_{م}$ أ^{ن} = ... حيث ن ∈ ح

(٨) اختصري كلاً مما يلي :

(أ) $\frac{٦^{٣} \times ٢^{٢} \times ٥^{٣}}{٥ \times ٣٦٠}$

(ب) $\frac{س^{١٠}}{س^{٤}}$ + س^{٦} حيث س ≠ ٠

(حـ) $\frac{(٦ أ^{٣})^{٤}}{(١٢ ب^{٢})^{٣}} \times \frac{(٢ أ^{٥})^{٣}}{٢٧ ب^{٦}}$ حيث ب ≠ ٠

(ء) $\left(\frac{\sqrt{١١}}{٥}\right)^{٥} \times \left[\left(\frac{٥}{\sqrt{١١}}\right)^{-٥}\right]^{-١}$

(هـ) $\left[(٨\sqrt{٢})^{-٢}\right]^{-٣} \times \left[(٢\sqrt{٢})^{-١}\right]^{٣}$

(٩) اختصري كلاً من اللوغاريتمات الآتية . بحيث يكون الكسر العشري موجباً :

(أ) - ٣ x ٠,٠٢٤٦

(ب) - $\overline{١}$,٢٤٨

(حـ) - ٥ x ٤,١١٢٣

(ء) ٣,١٦٥ ÷ $\overline{٧}$

(هـ) ٢ x $\overline{١}$,٢٤٣٧

(و) - ٢,٠٣٤٦

(ز) ٢,٦٧٤٤ ÷ $\overline{٤}$

(ح) - $\frac{٣}{٧}$ x ٢,٧٤٥٣

(ط) - $\frac{٢}{٥} \times \overline{٢},١٨٧٥$

(١٠) باستخدام جداول الاعداد المقابلة للوغاريتمات ، احسبي قيمة س في كل مما يلي :

(أ) لو س = $\overline{٢},٣٤٥١$

(ب) لو س = - ٠,٥٢٤٨

(حـ) لو س = ٣,١٠٠٧

(ء) لو س = $\overline{١},٧٤٨٢$

(هـ) لو س = $\frac{١}{٣} \times \overline{٢},٤٥١١$

(و) لو س = $\overline{٢},١٧٥٣-$

(١١) باستخدام جداول اللوغاريتمات ، أوجدي قيمة كل مما يأتي :

(أ) $\sqrt[٣]{٣٧,٢٨} + \sqrt[٥]{١,٨٤٣}$

(ب) $(١٤,٣٢)^{٣} - \sqrt{٤٨,١١}$

(حـ) $(٠,٢٤٣)^{٤} - \sqrt[٣]{٠,٠٩٨}$

(ء) $\frac{\sqrt[٣]{٣,٢٥١} \times ١٨,٦٢}{\sqrt{٢٧,١٣}}$

(هـ) $\frac{(٠,٧٦٣٢)^{٣}}{\sqrt{٠,١٥٣١}}$

(و) $\frac{\sqrt{٢٩,٥٣ \times ٨٤,٣١}}{١٣٤,٥}$

(ز) $\dfrac{٠,٠٣١٢ \times (٧,٣٤)^{٢} \times \sqrt{٠,٠٣٨}}{\sqrt[٣]{١,٩٨٢}}$

(١٢) إذا كان :

$$حـ = أ \times \dfrac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$$

فاحسبي قيمة حـ ، إذا علمت أن أ = ١٤٨٥ ، ر = ١,٠٥ ، ن = ٢٠

(١٣) إذا كان طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة يتعين من القانون :

$$نق = \sqrt{\dfrac{ح}{ط\,ع}}$$

حيث ح حجم الاسطوانة ، ع ارتفاعها ، فاحسبي قيمة نق إذا كان

ح = ٤٨٢,٣ سم^{٣} ، ع = ١٢,٤٢سم ، ط = ٣,١٤١٦.

(١٤) باستخدام جداول اللوغاريتمات ، رتبي المقادير الآتية ترتيباً تصاعدياً :

$$(٢,٦٤٣)^{٤} ، (\sqrt[٣]{١١,٣١})^{٥} ، \left(\dfrac{١}{٠,٩٨٤٣}\right)^{٣}$$

(١٥) إذا كان حجم الهرم الذي قاعدته مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ل يعطى بالقانون :

$$ح = \dfrac{\sqrt{٣}}{١٢}\, ل^{٢} . ع$$

حيث ع إرتفاع الهرم الساقط على هذه القاعدة ، فاحسبي قيمة ل عندما

ح = ٢٦٨,٤ سم^{٣} ، ع = ٢٥,٠٣ سم

(١٦) هل يمكنك إثبات أن :

$$لو_{أ} \frac{س_{١}}{س_{٢}} = لو_{أ} س_{١} - لو_{أ} س_{٢}$$

باستخدام النظريتين (٧-٥)،

(٧ - ٧) ؟

الاختيار والاستنتاج الرياضي

٨-١ مبدأ العدّ.

٨-٢ التباديل .

٨-٣ مجموعة القوة.

٨-٤ التوافيق.

٨-٥ الرمز Σ .

٨-٦ نظرية ذات الحدين.

٨-٧ الاستنتاج الرياضي.

- الخلاصة.

- تمارين عامة.

٨ – ١ مبـــدأ الـــعـــدّ

سنقدم لدراسة هذا المبدأ الأمثلة التالية :

مثال (٨ – ١)

يريد رجل أن يسافر من الرياض إلى المدينة المنورة ماراً بحائل ، ويمكن أن يســـافر في كل رحـــلة بالطــــــائرة أو السيارة . كم طـــريقة للســـــفر يمكن أن يتخــــــذها الرجــــل لكي يصــــــل من الريـــاض إلى المدينة المنورة ؟

الحـــــــل :

سنستخدم في الحل ما يسمى بالشجرة البيانية :

شكل (٨ – ١)

من الشجرة البيانية نتبين أن طرق السفر أربع وهي :

(١) (طائرة ، طائرة) (٢) (طائرة ، سيارة)

(٣) (سيارة ، طائرة) (٣) (سيارة ، سيارة)

لاحظي أن هذه الطرق أزواج مرتبة ، وكان يمكن أن تنتج من الجداء الديكارتي س × س حيث :

س = { طائرة ، سيارة }

مثال (٨ – ٢)

يراد تكوين أعداد مكونة من رقمين مختارين من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، بحيث

يسمح بتكرار الرقم .

الحل :

سنستخدم الشجرة البيانية أيضاً في هذا المثال كما يلي :

٣ ← ٣ (٣ ، ٣) ، ٤ ← (٣ ، ٤) ، ٥ ← (٣ ، ٥)

٤ ← ٣ (٤ ، ٣) ، ٤ ← (٤ ، ٤) ، ٥ ← (٤ ، ٥)

٥ ← ٣ (٥ ، ٣) ، ٤ ← (٥ ، ٤) ، ٥ ← (٥ ، ٥)

شكل (٨ – ٢)

نلاحظ أن الأعداد الناتجة هي :

٣٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٣٤ ، ٤٤ ، ٥٤ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٥ .

كما نلاحظ أن الزوج المرتب (٣ ، ٣) يناظر العدد ٣٣ . الزوج المرتب (٣ ، ٤) يناظر العدد ٤٣ . وهكذا .. وأن عدد الأعداد التي أمكن تكوينها هو ٩ . وكان يمكن الحصول عليها من الجداء الديكارتي س × س حيث :

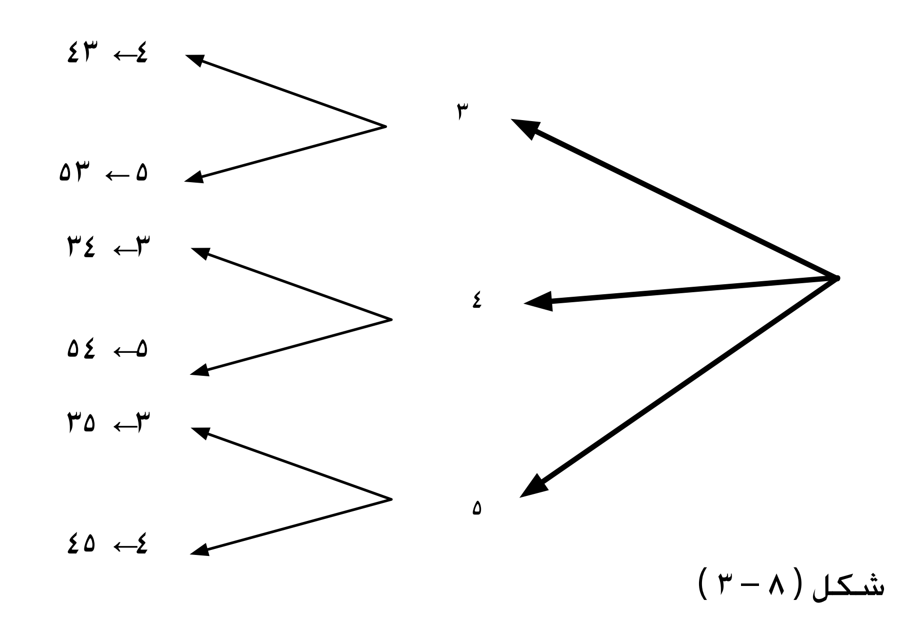
س = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

مثال (٨ - ٣)

كرري المثال (٨ – ٢) إذا لم يسمح بتكرار أي رقم

الحــــــــــل :

في هذه الحالة تكون الشجرة البيانية كما في الشكل (٨ – ٣) .



شكل (٨ – ٣)

نلاحظ أن عدد طرق اختيار الرقم الأول = ٣ .

عدد طرق اختيار الرقم الثاني (لدى تثبيت الرقم الأول) = ٢

عدد الطرق الناتجة = ٣ × ٢ = ٦ .

من الأمثلة السابقة نكتب **مبدأ العدّ** على إحدى الصورتين التاليتين :

(١) إذا كان هناك إجراء معين يمكن أن يتم بعدد من الطرق قدره $م_١$ ، ثم تبعه إجراء آخر يمكن أن يتم بعدد من الطرق قدره $م_٢$ (لدى تثبيت إحدى طرق الإجراء الأول) فإن الاجراءين يمكن أن يتما على التتابع بعدد من الطرق قدره $م_١ \times م_٢$.

(٢) إذا كانت $\tilde{س}_١$ ، $\tilde{س}_٢$ ، مجموعتين عدد عناصرهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب ، فإن المجموعة:

$$\tilde{س}_١ \times \tilde{س}_٢ = \{ (س_١ ، س_٢) : س_١ \in \tilde{س}_١ ، س_٢ \in \tilde{س}_٢ \}$$

عدد عناصرها يكون $م_١ \times م_٢$.

وبرهان (٢) واضح حيث أن :

كلاً من المركبات $س_١$ تشترك مع المركبات $س_٢$ « $م_٢$ » من المرات لتكوين $م_٢$ من الأزواج المرتبة .

وبما أن $س_١$ عددها $م_١$ ، فيلزم أن يكون لدينا $م_١ \times م_٢$ من الأزواج المرتبة .

تعريف (٨ – ١)

إذا كان عدد عناصر المجموعة س يساوي م ، فإننا نكتب :

ن (س) = م .

ويمكن أن نعمم مبدأ العد في النظرية التالية :

نظرية (٨ -١)

إذا كانت س_1 ، س_2 ، ... $\text{س}_\text{ك}$ مجموعات غير خالية وكان :

ن ($\text{س}_\text{ر}$) = $\text{م}_\text{ر}$ ، حيث ر = ١ ، ٢ ، ... ، ك فإن :

$\text{س}_1 \times \text{س}_2 \times \cdots \times \text{س}_\text{ك}$ = { (س_1 ، س_2 ، ... ، سك) :

$\text{س}_\text{ر} \in \text{س}_\text{ر}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ك } .

ن ($\text{س}_1 \times \text{س}_2 \times \cdots \times \text{س}_\text{ك}$) = $\text{م}_1 \times \text{م}_2 \times \cdots \times \text{م}_\text{ك}$.

مثال (٨ – ٤)

مطعم يقدم ٤ أصناف من اللحم ، ٣ أصناف من السلطة ، ٦ أصناف من الحلوى . كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها . وتتكون كل منها من لحم وسلطة وحلوى في هذا المطعم ؟

الحـــــــل :

نفرض أن $\tilde{س}_1$ مجموعة أصناف اللحوم ، فيكون ن ($\tilde{س}_1$) = ٤ .

$\tilde{س}_2$ مجموعة أصناف السلطات ، فيكون ن ($\tilde{س}_2$) = ٣ .

$\tilde{س}_3$ مجموعة أصناف الحـلــوى ، فيكون ن ($\tilde{س}_3$) = ٦ .

إذاً ن ($\tilde{س}_1$ × $\tilde{س}_2$ × $\tilde{س}_3$) = ٤ × ٣ × ٦

= ٧٢

أي أن عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها = ٧٢ وجبة .

مثال (٨ – ٥)

كم عدداً مكوناً من ٣ أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ؟

(أ) عندما يسمح بتكرار الرقم . (ب) عندما لا يسمح بالتكرار .

الحـــــــل :

نعتبر المجموعات التالية تمثل الآحاد والعشرات والمئات على الترتيب :

آحـــاد	عشرات	مئات
$\tilde{س}_1$	$\tilde{س}_2$	$\tilde{س}_3$

(١) عندما يسمح بتكرار الرقم ، فــإن :

ن ($\tilde{س}_1$) = ٤ ، ن ($\tilde{س}_2$) = ٤ ، ن ($\tilde{س}_3$) = ٤ .

ن ($\tilde{س}_1$ × $\tilde{س}_2$ × $\tilde{س}_3$) = ٤ × ٤ × ٤

= $٤^{٣}$ = ٦٤ طريقة .

(ب) إذا لم يسمح بتكرار الرقم ، فإن :

$ن(س_١) = ٤$ ، $ن(س_٢) = ٣$ ، $ن(س_٣) = ٢$.

$ن(س_١ × س_٢ × س_٣) = ٤ × ٣ × ٢$

$= ٢٤$ طريقة .

تمارين (٨ – ١)

(١) إذا كان لديك ٥ زهرات حمر ، ٧ بيض ، ٣ صفر ، وأردتِ أن تصنعي باقات صغيرة تشتمل كل منها على زهرة حمراء، زهرة بيضاء، زهرة صفراء، فكم يكون عدد الباقات ؟ ارسمي شجرة بيانية (علماً بأنه يمكن تمييز زهرات كل لون)

(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب ٧ كتب مختلفة ؟ .

(٣) ٦ مكعبات صغيرة مختلفة ، طلب من طفل أن يرتبها في صف واحد .

بكم طريقة يمكن أن يرتبها ؟ و إذا طلب منه أن يرتبها في دائرة ، فبكم طريقة يمكنه ذلك ؟

(٤) أراد لاعب تنس أن يختار كرتين من كرات التنس من صندوق به ٨ كرات مختلفة. فبكم طريقة يمكنه ذلك إذا كان يختارها واحدة بعد الأخرى ؟

(٥) لتكن أ ، ب ، حـ ثلاث مدن ، ولنفترض أنك تريدين أن تسافرى من أ إلى

طريقان مختلفان بين ب ، حـ . فبكم طريقة يمكن أن تسافري من أ إلى حـ ؟

ارسمي شجرة بيانية .

(٦) كم عدداً مكوناً من ٤ أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩ بحيث :

أ) يسمح بتكرار الرقم ؟ ب) لا يسمح بتكرار الرقم ؟

(٧) كم كلمة مكونة من ٥ حروف يمكن تكوينها باستخدام الحروف أ ، ب ، حـ ، ى ، هـ ، و ، ز بحيث :

أ) يسمح بتكرار الحروف ؟ ، ب) لا يسمح بتكرار الحروف ؟

(٨) بكم طريقة يمكن إهداء مجموعة من الطلاب المتفوقين مجموعة من الكتب مكونة من كتاب باللغة الانجليزية ، وكتاب تاريخ ، وكتاب علوم ، مختارة من ٥ كتب باللغة الانجليزية ، ٧ كتب تاريخ ، ٣ كتب علوم ؟ (علماً بأن كتب كل نوع مختلفة) .

٨ – ٢ التباديل

تعريف (٨ – ٢)

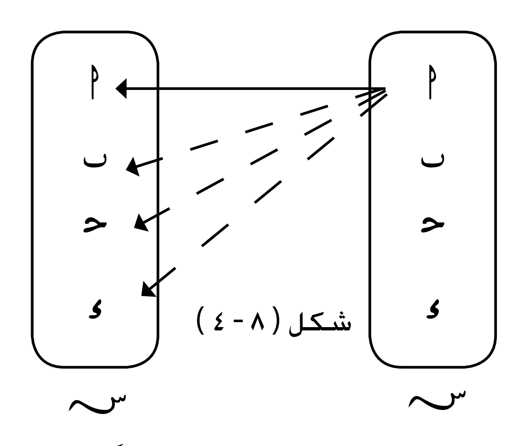
تبديل مجموعة س هو تقابل من المجموعة على نفسها .

مثال (٨ – ٦)

كم عدد التقابلات من المجموعة س = { أ ، ب ، حـ ، ى } على نفسها ؟

الحـــــــــل :

يمـكـن أن نـخـتـار الـعـنـصـر الأول أ واحـداً مـن الـعـنـاصـر الأربـعـة مـن المجـمـوعـة س~



شـكـل (٨ - ٤)

لـيـكـون صـورة لـه كـالآتـي :

أ ⟵ أ أو أ ⟵ ب أو

أ ⟵ حـ أو أ ⟵ د

كـمـا فـي الـشـكـل (٨ - ٤) .

ويـبـقـى لـلـعـنـصـر الـثـانـي ب ثـلاثـة عـنـاصـر فـقـط مـن س~ لـنـخـتـار مـنـهـا واحـداً لـيـكـون

صـورة ب ، ويـكـون :

عـدد طـرق اخـتـيـار صـورة لـلـعـنـصـر ب = ٣ طـرق ،

وبـالمـثـل يـبـقـي عـنـصـران فـقـط مـن س~ لـنـخـتـار مـنـهـمـا صـورة الـعـنـصـر حـ ويـكـون :

عـدد طـرق اخـتـيـار صـورة لـلـعـنـصـر حـ = ٢ طـريـقـة ،

عـدد طـرق اخـتـيـار صـورة لـلـعـنـصـر د = ١ طـريـقـة .

وعـلـيـه فـإن :

عــدد الـتــقـابـلات مـن س~ إلـى س~ = ٤ x ٣ x ٢ x ١ ، وهـذا يـتـفــق مـع الـنـظـريـة (٨ - ١)

ويمـكـن تـعـمـيـم هـذا المـثـال بـالـنـظـريـة الـتـالـيـة :

نظـريـة (٨ – ٢) :

إذا كانت $\tilde{س}$ مجموعة عدد عناصرها ك ، فإن :

عدد تباديل $\tilde{س}$ = ك (ك – ١) (ك – ٢) ‎.‎‎.‎‎.‎‎.‎ × ٢ × ١ .

البرهان

(١) العنصر الأول في $\tilde{س}$ يمكن أن نعين له صورة بطرق عددها ك .

(٢) العنصر الثاني في $\tilde{س}$ يمكن أن نعين له صورة بطرق عددها (ك – ١) .

بعد استبعاد صورة العنصر الأول .

(٣) بما انه لدينا ك من العناصر ، فمن مبدأ العد يكون :

عدد تباديل $\tilde{س}$ = ك (ك – ١) (ك – ٢) ‎.‎‎.‎‎.‎‎.‎ × ٢ × ١

ونرمز لحاصل الضرب ك(ك – ١) (ك – ٢) ‎.‎‎.‎‎.‎‎.‎ × ٢ × ١ بالرمز

$\lfloor ك$ ويقرأ « مضروب ك » .

أي أنه لكل عدد صحيح موجب ك فإن :

$\lfloor ك$ = ك (ك – ١) (ك – ٢) ‎.‎‎.‎‎.‎‎.‎ × ٢ × ١

ويعرف ٠| = ١ .

ك – ١| = (ك – ١) (ك – ٢) . . . . × ٢ × ١

إذاً ك| = ك ك – ١|

= ك (ك - ١) ك - ٢|

= . . . .

مثال (٨ – ٧)

إذا أعطينا الأشكال □ ، Δ ، ○ فإن التباديل الممكنة هي :

○	Δ	□
Δ	○	□
○	□	Δ
□	○	Δ
□	Δ	○
Δ	□	○

واضح ان عدد هذه التباديل يساوي ٦ = ٣| .

مثال (٨ – ٨)

جميع الأعداد التي يمكن تكوينها من الأرقام ١ ، ٤ ، ٧ بدون تكرار الرقم هي : ٧٤١ ، ٤٧١ ، ١٤٧ ، ٤١٧ ، ٧١٤ ، ١٧٤ .

واضح أن هذه الأعداد مختلفة وعددها = أ = ٣| .

مثال (٨ – ٩)

ماعدد الأعداد ، التى يتكون كل منها من أربعة أرقام مختلفة من المجموعة

{ ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ }؟

الحـــــــل :

رقم الآحاد يمكن اختياره بطرق عددها ٤ ،

رقم العشرات يمكن اختياره بطرق عددها ٣ بعد اختيار الآحاد .

رقم المئات يمكن اختياره بطرق عددها ٢ بعد اختيار الآحاد والعشرات .

رقم الآلاف يمكن اختياره بطرق عددها ١ بعد اختيار الآحاد والعشرات والمئات.

ويكون عدد الأعداد المطلوبة = ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٤ عدداً .

هذا إذا اعتبرنا أن عدداً مثل (٠٤٧١) وهو أحد الأعداد التي سنحصل عليها عندما تشغل خانة الألوف بالرقم «٠». أما إذا لم نعتبر مثل هذا العدد عدداً من أربعة أرقام، فإن عدد التباديل بالنسبة للمئات والعشرات الآحاد = ٣، وأما مكان الألوف، فإنه يملأ بثلاث طرق فقط، ويكون عدد الأعداد المطلوبة في هذه الحالة = ٣ ٣ من مبدأ العدّ ، أي :

= ١٨ عدداً .

تعـريـف (٨ – ٣)

تراتيب أو تباديل مجموعة ن عـدد عناصـرها ك أخـذت راءً

نلاحظ أنه عندما $س_١ = س$ ، فإن التعريفين (٨ – ٢) ، (٨ – ٣) يتطابقان

ومن هذا التعريف نصل إلى النظرية التالية :

نظريـــة (٨ – ٣)

إذا كانت س مجموعة عدد عناصرها ك فإن عدد تباديل عناصر س مأخوذة راءً راءً يرمز له بالرمز $^{ك}ل_ر$ وهو يساوي :

$$^{ك}ل_ر = ك (ك – ١) \cdots\cdot (ك – ر + ١) ، ر \le ك$$

البرهان :

نفرض أن $س_١ \subset س$ ، ن ($س_١$) = ر .

من التعريف (٨ – ٢) :

(١) العنصر الأول في $س_١$ يمكن ان نعين له صورة بطرق عددها ك .

(٢) إذا تعينت صورة للعنصر الأول ، فإن العنصر الثاني يمكن أن نعين له صورة بطرق عددها (ك – ١) .

(٣) وهكذا فإن العنصر الرائي يمكن أن يعين له صورة بطرق عددها

$$\left(ك – (ر – ١) \right) = (ك – ر + ١) .$$

(٤) من مبدأ العدّ يكون :

$$^{ك}ل_ر = ك (ك – ١) (ك – ٢) \cdots (ك – ر + ١)$$

نتيجة (٨ – ١)

$$ل^{ك}_{ر} = \frac{ك!}{(ك - ر)!} \quad ، \quad ر \leq ك$$

البرهان :

$$ل^{ك}_{ر} = ك\,(ك - ١)\,(ك - ٢) \cdots (ك - ر + ١)$$

$$= ك\,(ك - ١)\,(ك - ٢) \cdots (ك - ر + ١) \times \frac{(ك - ر)!}{(ك - ر)!}$$

$$= \frac{ك\,(ك - ١)\,(ك - ٢) \cdots (ك - ر + ١)\,(ك - ر) \cdots \times ٢ \times ١}{(ك - ر)!}$$

$$= \frac{ك!}{(ك - ر)!} \,.$$

نتيجة (٨ – ٢)

$$ل^{ك}_{ك} = \frac{ك!}{٠!} = ك! \,.$$

مثال (٨ – ١٠)

عدد الكلمات المكون كل منها من حرفين مختلفين والمكون كل منها من ثلاثة أحرف مختلفة مأخوذة من ستة أحرف مختلفة هي على الترتيب :

$^{6}\text{ل}_{2} = 6 \times 5$ = ٣٠ كلمة .

$^{6}\text{ل}_{3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ كلمة .

مثال (٨ – ١١)

أثبتي أن : $^{\text{ك}+1}\text{ل}_{\text{ر}} : {}^{\text{ك}}\text{ل}_{\text{ر}-1} = \text{ك} + 1$

الحـــل :

الطرف الأيمن $= \dfrac{(\text{ك}+1)!}{(\text{ك}+1-\text{ر})!} \div \dfrac{\text{ك}!}{(\text{ك}-(\text{ر}-1))!}$ من النتيجة (٨ – ١)

$= \dfrac{(\text{ك}+1)!}{(\text{ك}-(\text{ر}-1))!} \times \dfrac{(\text{ك}-\text{ر}+1)!}{\text{ك}!}$

$= \dfrac{(\text{ك}+1)}{\text{ك}!}$

$= \dfrac{(\text{ك}+1)\,\text{ك}!}{\text{ك}!}$

$= \text{ك} + 1$

= الطرف الأيسر .

مثال (٨ – ١٢)

إذا كان $^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{2} = 210$ ، $^{\text{م}-\text{ن}}\text{ل}_{2} = 72$ ، فما قيمة كل من م ، ن ؟

الحـــــل :

$$ل_{م}^{م+ن} = ٢١٠ = ١٥ \times ١٤ \Longleftarrow م + ن = ١٥ \quad .... (١)$$

$$ل_{م}^{م-ن} = ٧٢ = ٩ \times ٨ \Longleftarrow م - ن = ٩ \quad ..... (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) نستنتج أن :

$$٢ م = ٢٤ \Longleftrightarrow م = ١٢ ،$$

وبالتعويض في (١) ، نحصل على : ن = ٣ .

تمارين (٨ – ٢)

(١) إذا كانت سـ = { أ ، حـ ، و ، س ، ع ، ل ، ن ، ى } ، فأوجدي عدد الكلمات المكونة من عناصر سـ دون تكرار في نفس الكلمة ، وبحيث تكون الكلمة مكونة من :

(أ) حرفين (ب) ٣ حروف (حـ) ٤ حروف

(ى) ٥ حروف (هـ) ٦ حروف (و) ٧ حروف

(ز) ٨ حروف .

(٢) إذا كانت سـ مجموعة مكونة من ٨ عناصر ، فكم تطبيقاً متبايناً يمكن تعيينه من المجموعة $سـ_١$ إلى سـ ، إذا كانت $سـ_١$ تحتوى على :

(أ) عنصرين (ب) ٣ عناصر (حـ) ٤ عناصر

(ى) ٥ عناصر (هـ) ٦ عناصر (و) ٧ عناصر

(ز) ٨ عناصر .

(٣) احسبي : $\lfloor ٥$ ، $^{٥}ل_{٢}$ ، $^{٦}ل_{٣}$ ، ٧ ، $\lfloor {^{٨}ل_{٢}}$ ، $^{٨}ل_{١}$ ، $\frac{^{٨}ل_{٤}}{^{٨}ل_{٣}}$ ، $\frac{^{٩}ل_{٥}}{^{٩}ل_{٣}}$

(٤) كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام من ٠ إلى ٩ إذا كان :

(أ) العدد مكوناً من ٣ أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم ؟

(ب) العدد مكوناً من ٤ أرقام ولا يسمح بتكرار الرقم ؟

(٥) إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٣ ، ٦ ، ٧ } ، فكم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه إذا كان :

(أ) كل رقم يمكن استخدامه مرة واحدة فقط ؟

(ب) الرقم ٧ يجب أن يكون في الخانة الثانية ؟

(حـ) الرقم ١ يجب أن يكون فى الخانة الأولى ، والرقم ٦ يجب أن يكون في الخانة الأخيرة ؟

(٦) ستة طلاب يشتركون فى لعبة الكراسي . فإذا كان عدد الكراسي ٥ ، فبكم طريقة يمكن أن يجلس الطلاب حتى تنتهي اللعبة ؟

(٧) بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب مختلفة على احد الرفوف. وبكم طريقة يمكن إجراء هذا الترتيب إذا كان المطلوب أن يظل كتابان معينان لا ينفصلان ؟

(٨) لدينا ٥ كتب مختلفة في الرياضيات ، ٤ كتب مختلفة في الفيزياء ، كتابان مختلفان في الأحياء . بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الكتب ، بحيث تبقى كتب كل موضوع على حدة ؟

(٩) إذا كان $\underline{|\text{ن}}$ = ٧٢٠ فما قيمة ن ؟

(١٠) إذا كان $\dfrac{\underline{|\text{ن} + ١}}{\underline{|\text{ن} - ١}}$ = ٤٢ ، فما قيمة ن ؟ (حيث ن $\in$ ط)

(١١) إذا كان :

$^{٧}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ٢٥٢٠ ، فما قيمة ر ؟

(١٢) إذا كان :

$^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ٩٠ ، $^{\text{م}-\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ١٢ ، فما قيمة كل من م ، ن ؟

(١٣) إذا كان $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}}{^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}}$ = ١٢ ، فما قيمة ن ؟

٨-٣ مجموعة القوة

مثال (٨ – ١٣)

سبق أن درسنا المجموعات الجزئية . فمثلاً إذا كانت :

س = { أ ، ب ، حـ } ، فإن المجموعات :

ϕ ، { أ } ، { ب } ، { حـ } ، { أ ، ب } ، { أ ، حـ } ، { ب ، حـ } ،

{ أ ، ب ، حـ } كل منها مجموعة جزئية من المجموعة س . وسنعرف المجموعة

ق (س) بأنها المجموعة المكونة من المجموعات السابقة كعناصر . ويلاحظ

في هذا المثال أن : ن (س) = ٣ ، ن (ق (س)) = ٨ .

أي أن عدد عناصر المجموعة س~ يساوي ٣ ، بينما عدد عناصر المجموعة

ق (س~) يساوي ٨ .

تعريف (٨ – ٤)

المجموعة التي عناصرها المجموعات الجزئية لمجموعة معينة س~ تسمى مجموعة القوة للمجموعة س~ ، ونرمز لها بالرمز ق (س~) .

نظرية (٨ – ٤)

إذا كانت س~ مجموعة وكان :

ن (س~) = ك ، فإن : ن (ق (س~)) = ٢^ك

البرهان :

إن عناصر أي مجموعة جزئية من س~ تتكون من عناصر من س~ ، وكل مجموعة جزئية يمكن أن ينظر اليها على أنها ناتج ك من الاختيارات المتتابعة ، والاختيار هنا هو إما أن نأخذ العنصر الأول من س~ او نتركه ، ثم إما ان نأخذ العنصر الثاني من س~ أو نتركه ، وهكذا بالنسبة لبقية العناصر .

أي أن هناك إمكانيتين لكل عنصر في المجموعة س~ التى عدد عناصرها ك . وعليه فمن مبدأ العد نجد أن :

$$= \underbrace{٢ \times ٢ \times ... \times ٢}_{\text{ك من المرات}} = ٢^{ك}$$

أي أن : ن (ق (س~)) = $٢^{ك}$.

ملاحظة (٨ – ١)

بتطبيق هذه النظرية على المثال (٨ – ١٣) نجد أن :

ن (س~) = ك = ٣ ، ن (ق (س~)) = $٢^{٣}$ = ٨ .

مثال (٨ – ١٤)

أوجدي ق (س~) إذا كانت :

(أ) س~ = ϕ .

(ب) س~ = { أ ، ب } .

وحققي النظرية (٨ – ٤) .

الحـــــل :

(أ) بما أن س~ هي المجموعة الخالية ، فليس لها إلا مجموعة جزئية واحدة ،

وهي المجموعة الخالية نفسها .

إذاً ق (س~) = { ϕ } = مجموعة ذات عنصر واحد .

ويلاحظ أن ك = ٠ إذاً ن (ق (س~)) = $٢^{٠}$ = ١ .

(ب) في هذه الحالة :

$\text{ق}(\text{س}) = \{ \phi ، \{ أ \} ، \{ ب \} ، \{ أ ، ب \} \}$

= مجموعة ذات أربعة عناصر .

ويلاحظ أن : ك = ٢

إذاً ن (ق (س)) = ٢^٢ = ٤ .

٨ – ٤ التوافيق

في البند السابق ، درسنا كيف نوجد عدد كل المجموعات الجزئية لمجموعة معلومة ، وبالرجوع إلى المثال (٨ – ١٣) نلاحظ ما يأتي :

عدد المجموعات الجزئية الخالية = ١

عدد المجموعات الجزئية ذوات العنصر الواحد = ٣

عدد المجموعات الجزئية ذوات العنصرين = ٣

عدد المجموعات الجزئية ذوات الثلاثة عناصر = ١

المجموع = ٨

ولذا، فإن المطلوب في هذا البند إيجاد عدد المجموعات الجزئية ، إذا أعطينا عدد عناصرها. أو بمعنى آخر ، إذا كان : ن (س) = ك ، فما هو عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصر كل منها ر، حيث ر ≤ ك ؟

وسنرمز لذلك بالرمز $\binom{ك}{ر}$ وتقرأ (ك فوق ر) وتسمى بعدد توافيق

ك من العناصر مأخوذة راءً راءً ، أي أن :

$$\binom{٣}{٠} = \binom{٣}{٣} = ١ ، \binom{٣}{١} = \binom{٣}{٢} = ٣ .$$

وبالرجوع إلى المثال (٨ – ١٤) نلاحظ أيضاً :

$$\binom{٠}{٠} = ١ ، \binom{٢}{٠} = \binom{٢}{٢} = ١ ، \binom{٢}{١} = ٢ .$$

وعليه نقدم النظرية التالية :

نظريــــة (٨ – ٥)

إذا كانت س~ مجموعة عدد عناصرها ك ، فإن عدد مجموعاتها الجزئية ذوات ر من العناصر $= \binom{ك}{ر} = \frac{{}^{ك}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ **، ر ≤ ك .**

البرهان :

(١) من النظرية (٨ – ٣) ، نستنتج أنه يوجد $^{ك}ل_{ر}$ تطبيق أحادي من المجموعة

{ ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠ ، ر } إلى المجموعة س~ .

أي أنه يوجد $^{ك}ل_{ر}$ من المجموعات الجزئية ذوات ر من العناصر .

(٢) كل من هذه المجموعات الجزئية المذكورة في (١) يتكرر ظهورها ك من المرات بإعادة ترتيب عناصرها .

(٣) إذاً عدد المجموعات الجزئية غير المتكررة ذوات ر من العناصر يساوي $\frac{{}^{ك}ل_{ر}}{ر!}$ ، أي أن :

$$\binom{ك}{ر} = \frac{{}^{ك}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ك\,(ك-١)\,(ك-٢)\cdots(ك-ر+١)}{ر\,(ر-١)\,(ر-٢)\cdots\times ٢\times ١}$$

نتيجة (٨ – ٣)

$$\binom{ك}{ر} = \frac{ك!}{ر!\,(ك-ر)!}$$

البرهـــــان :

من النتيجة (٨ – ١) نجد أن : $^{ك}ل_{ر} = \frac{ك!}{(ك-ر)!}$

بالتعويض في النظرية (٨ – ٥) نحصل على المطلوب مباشرة .

نتيجة (٨ – ٤)

$$\binom{ك}{ر} = \binom{ك}{ك-ر}$$

البرهـــــان :

الطرف الأيسر $= \frac{ك!}{(ك-ر)!\,(ك-ك+ر)!} = \frac{ك!}{(ك-ر)!\,ر!} = \binom{ك}{ر}$

= الطرف الأيمن .

نتيجة (٨ – ٥)

$$٢^{ك} = \binom{ك}{٠} + \binom{ك}{١} + \dots + \binom{ك}{ر} + \dots + \binom{ك}{ك}$$

البرهـــان :

الطرف الأيمن يساوي عدد جميع المجموعات الجزئية لمجموعة س مثلا عدد عناصرها ك ، من النظرية (٨ – ٤) .

الطرف الأيسر يساوي عدد المجموعات الجزئية للمجموعة س الخالية من العناصر مضافاً إليها ذوات العنصر الواحد ، مضافاً إليها ذوات العنصرين ... إلى ذوات ك من العناصر .

ومن ذلك نستنتج أن : الطرف الأيمن = الطرف الأيسر .

مثال (٨ – ١٥)

ما معنى (أ) $\binom{ك}{٠}$ (ب) $\binom{ك}{ك}$

الحـــل :

(أ) $\binom{ك}{٠}$ هو عدد المجموعات الجزئية الخالية لمجموعة معينة

ولا يوجد إلا المجموعة الخالية التي تحقق هذا المعنى أي أن

$$\binom{ك}{٠} = ١$$

(ب) $\binom{ك}{ك}$ هو عدد المجموعات الجزئية ذوات ك من العناصر لمجموعة ذات ك من العناصر، أي أنها المجموعة نفسها. ومن ذلك نتبين أن

$\binom{ك}{ك} = ١$.

ملاحظة (٨ – ٢)

يمكن الحصول على قيمة $\binom{ك}{٠}$ أو $\binom{ك}{ك}$ بسهولة من النتيجة (٨ – ٣) السابقة .

مثال (٨ – ١٦)

أوجدي قيمة (أ) $\binom{٨}{٣}$ ، (ب) $\binom{٨}{٥}$

الحـــــــــل :

$$(أ)\ \binom{٨}{٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} = ٥٦ .$$

$$(ب)\ \binom{٨}{٥} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٥٦$$. من النتيجة (٨ – ٤)

يلاحظ أن $\binom{٨}{٥} = \binom{٨}{٨-٥} = \binom{٨}{٣}$

مثال (٨ – ١٧)

بكم طريقة يمكن لطالب أن يختار ستة أسئلة من ورقة اختبار بها ثمانية أسئلة ؟

الحـــــــــــل :

عدد طرق الاختيار = $\binom{٨}{٦}$

= $\binom{٨}{٢}$ من النتيجة (٨ – ٤)

= $\frac{٨ \times ٧}{٢}$ = ٢٨ طريقة .

مثال (٨ – ١٨)

بكم طريقة يمكـــن اخـــــتيار ١٠ كرات منها ٣ حــــــمر ، اثنتان بيضــاوان ، ٥ خضر ، من ٥ كرات حــــــمر ، ٤ كرات بيـــــض ، ٧ كرات خــــــضر ؟

الحـــــــــــل :

عدد طرق اختيار الكرات الحمر = $\binom{٥}{٣}$ = ١٠ .

عدد طرق اختيار الكرات البيض = $\binom{٤}{٢}$ = ٦ .

عدد طرق اختيار الكرات الخضر = $\binom{٧}{٥}$ = ٢١

وبما أن هذه العمليات تتم على التتابع ، فمن مبدأ العدّ يكون :

عدد طرق اختيار الكرات العشر = ١٠ × ٦ × ٢١

= ١٢٦٠ طريقة .

تمارين (٨ – ٣)

(١) احسبي قيمة كل مما يلي :

$ل^{٥}_{٢}$ ، $ل^{٧}_{٣}$ ، $ل^{١٤}_{٢}$ ، $\binom{٦}{٤}$ ، $\binom{٩}{٣}$

$\binom{١٠}{٨}$ ، $\binom{١٢}{١١}$ ، $\binom{٢٠٠}{٠}$ ، $\binom{٣٠٠}{٣٠٠}$ ، $\frac{ن!}{(ن-٢)!}$.

(٢) أثبتي صحة القانون :

$\binom{ن}{ر-١} + \binom{ن}{ر} = \binom{ن+١}{ر}$.

وحققي ذلك على سبيل المثال عندما ن = ٦ ، ر = ٣ .

(٣) أثبتي صحة القانون :

$$\frac{\binom{ن}{ر}}{\binom{ن}{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

ثم استخدمي ذلك في إيجاد قيمة كل من :

(أ) $\dfrac{\binom{٨}{٣}}{\binom{٨}{٢}}$ (ب) $\binom{١٢}{٨} \div \binom{١٢}{٧}$ (حـ) $\binom{٢٠}{} \div \binom{٢٠}{١٢}$ ١٣

(ى) $\binom{١٥}{١١} \div \binom{١٥}{٩}$. $\left(\text{لاحظي أن } \dfrac{\binom{١٥}{١١}}{\binom{١٥}{٩}} = \dfrac{\binom{١٥}{١١}}{\binom{١٥}{١٠}} \cdot \dfrac{\binom{١٥}{١٠}}{\binom{١٥}{٩}} \right)$

(٤) باستخدام القانونين المذكورين في التمرينين (٢) ، (٣) ، أوجدي قيمة كل من :

(أ) $\dfrac{\binom{١٢}{٩} + \binom{١٢}{٨}}{\binom{١٢}{٨} + \binom{١٢}{٧}}$ (ب) $\dfrac{\binom{٢٠}{١٥} + \binom{٢٠}{١٤}}{\binom{٢٠}{١٦} + \binom{٢٠}{١٥}}$

(٥) أوجدي القيمة العددية لما يأتي :

$$\binom{١٢}{٠} + \binom{١٢}{١} + \binom{١٢}{٢} + \cdots + \binom{١٢}{١٢}$$

(٦) مجلس إدارة مكون من ١٣ عضواً . بكم طريقة يمكن أخذ قرار باتفاق ٩ أعضاء ضد ٤ أعضاء ؟

(٧) يراد اختيار هيئة لتحرير مجلة مدرسية، بحيث يختار ٣ من الصف الثالث، واثنان من الصف الثاني، وواحد من الصف الأول، علماً بأن عدد الطلبة في الصفوف الثلاثة هو ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ على التوالي . فبكم طريقة يمكن اختيار هذه الهيئة ؟

(٨) ماهو عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ٤ قطع من العملة أو اكثر من بين ٧ قطع ؟

(٩) أراد طالب شراء ٣ قصص باللغة العربية، واثنتين باللغة الانجليزية. فإذا وجد بالمكتبة ١٠ قصص باللغة العربية، ٨ باللغة الانجليزية، فبكم طريقة يمكنه شراء ما يلزم ؟ .

٨ – ٥ الرمز $\sum$

الرمز $\sum$ يقرأ « سيجما » ويعني مجموع . فمثلاً :

(أ) $\sum_{1}^{3}$ ر يعني مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة من ١ إلى ٣

أي الأعداد (١ ، ٢ ، ٣)

(ب) $\sum_{3}^{6}$ (٢ ر – ١) يعني مجموع الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة من ر = ٣ الى ر = ٦ أي الأعداد (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١) .

(حـ) $\sum_{1}^{5}$ س$_ر$ يعني مجموع الأعداد س$_ر$ بإعطاء ر جميع القيم الصحيحة

الموجبة من ر = ١ الى ر = ٥ ، أي :

(س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، س$_٤$ ، س$_٥$) .

من الأمثلة السابقة نتبين أن الرمز $\sum$ يحقق التعريف الآتي :

تعريف (٨ – ٥)

$$\sum_{1}^{ن} س_ر = س_١ + س_٢ + \cdots + س_ن .$$

مثال (٨ – ١٩)

(أ) $\sum_{1}^{5} ر^2 = ١^2 + ٢^2 + ٣^2 + ٤^2 + ٥^2$.

(ب) $\sum_{0}^{4} \frac{ر}{ر + ١} = ٠ + \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥}$.

(حـ) $\sum_{1}^{3} ٢ ر (ر + ١) = ٢ \times ١ \times ٢ + ٢ \times ٢ \times ٣ + ٢ \times ٣ \times ٤$

(ى) $\sum_{1}^{ن} ر^3 = ١ + ٢^3 + ٣^3 + ... + ن^3$.

(هـ) $\sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{ر(ر+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots$

$+ \frac{1}{ن(ن+1)}$

الرمز $\sum$ أحد الرموز الرياضية الجبرية ، وهو يحقق الخواص الآتية :

(أ) خاصة التوزيع ، أي أن :

$$\sum_{1}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \sum_{1}^{ن} س_ر + \sum_{1}^{ن} ص_ر .$$

(ب) خاصة توزيع الضرب على الجمع ، أي أن :

$$\sum_{1}^{ن} أ س_ر = أ \sum_{1}^{ن} س_ر$$

ويجب ملاحظة أنه لا يمكن إبدال $\sum$ مع $س_ر$.

ويمكن برهان هاتين الخاصتين من التعريف (٨ – ٥) بسهولة ، وسنترك ذلك للطالبة .

مثال (٨ – ٢٠)

أوجدي قيمة $\sum_{1}^{ن} س_ر$ إذا كان $س_ر = ١$ لجميع قيم ر .

الحـــــــل :

$$\sum_{١}^{ن} س_{ر} = س_{١} + س_{٢} + ... + س_{ن}$$

$$= ١ + ١ + \cdots + ١$$

$$= ن .$$

تمارين (٨ – ٤)

(١) اكتبي الحدود الخمسة الأولى في المجاميع الآتية :

(أ) $\sum_{١}^{ن} ٢\,ر^{٢}$ (ب) $\sum_{٣}^{ن} \frac{ر}{ر - ١}$ (حـ) $\sum_{٠}^{ن} \frac{٢^{ر}}{ر!}$

(٢) أثبتي صحة ما يأتي :

(أ) $\sum_{٠}^{ن} \frac{س^{ر}}{ر!} = ١ + س + \sum_{٠}^{ن - ٢} \frac{س^{ر+٢}}{(ر + ٢)!}$

(ب) $\sum_{٠}^{ن} س_{ر} = \sum_{٠}^{ن} س_{ن-ر}$.

(حـ) $\sum_{٠}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر} = \sum_{٠}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{ر} ب^{ن-ر}$

(٣) اكتبي المفكوكات الآتية على صورة مجاميع ، مستخدمةً الرمز $\sum$:

(أ) ٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ن .

(ب) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{\text{ن}!}$.

(حـ) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{\text{ن}}{2\text{ن} + 1}$.

٨ – ٦ نظرية ذات الحدين

(أ + ب) مقدار مكون من حدين هما أ ، ب . ومفكوك المقدار $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$

هو موضوع نظرية ذات الحدين (أو مفكوك ذات الحدين) . ومن المعلوم أن :

$(\text{أ} + \text{ب})^{1} = \text{أ} + \text{ب}$ ،

$(\text{أ} + \text{ب})^{2} = \text{أ}^{2} + 2\text{أ}\text{ب} + \text{ب}^{2}$ ،

$(\text{أ} + \text{ب})^{3} = \text{أ}^{3} + 3\text{أ}^{2}\text{ب} + 3\text{أ}\text{ب}^{2} + \text{ب}^{3}$ ،

$(\text{أ} + \text{ب})^{4} = \text{أ}^{4} + 4\text{أ}^{3}\text{ب} + 6\text{أ}^{2}\text{ب}^{2} + 4\text{أ}\text{ب}^{3} + \text{ب}^{4}$.

الأطراف اليسرى فيما سبق هي نماذج لمفكوك ذات الحدين عندما يكون :

ن = ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ . ويمكن أن نلاحظ في هذه المفكوكات ما يأتي :

(١) عدد الحدود في كل مفكوك يزيد واحداً عن الأس في الطرف الأيمن .

(٢) الحد الأول في المفكوك هو العدد أ مرفوعاً لنفس الأس في الطرف الأيمن ، ثم ينقص الأس للعدد أ في الحدود التالية بمقدار الوحدة في كل مرة .

(٣) العدد ب يبدأ ظهوره في الحد الثاني ، ثم يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة على التوالي .

(٤) مجموع الأسين للعددين ا ، ب في أي حد من حدود المفكوك ثابت ،

ويساوي الأس في الطرف الأيمن .

(٥) معامل الحد الأول في المفكوك يساوي معامل الحد الأخير يساوي الواحد ،

ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير وهكذا .

رأينا في الصفحة السابقة أنه في الحالات ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، فإن

$(ا + ب)^{ن}$ يمكن أن يكتب على الشكل التالي :

$$(ا + ب)^{ن} = ا^{ن} + م_{١} ا^{ن-١} ب + م_{٢} ا^{ن-٢} ب^{٢} + \dots +$$

$$م_{ر} ا^{ن-ر} ب^{ر} + \dots + ب^{ن}$$

وسنبين في البند ٨ – ٧ صحة هذه المساواة أياً كان العدد الطبيعي ن . وما الهدف من النظرية التالية إلاتعيين المعاملات $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ، ... $م_{ن-١}$

نظرية (٨ – ٦)

إذا كان ن أي عدد صحيح موجب فإن :

$$(ا + ب)^{ن} = ا^{ن} + \binom{ن}{١} ا^{ن-١} ب + \binom{ن}{٢} ا^{ن-٢} ب^{٢} + \dots +$$

$$\binom{ن}{ر} ا^{ن-ر} ب^{ر} + \dots + ب^{ن}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} ا^{ن-ر} ب^{ر} .$$

البرهان :

من المعلوم أن :

$$(\text{أ} + \text{ب})^{ن} = (\text{أ} + \text{ب}) (\text{أ} + \text{ب}) \dots (\text{أ} + \text{ب})$$

ن من العوامل .

وباستخدام خاصة التوزيع يمكن أن نكتب :

$$(\text{أ} + \text{ب})^{ن} = م_{٠} \text{أ}^{ن} + م_{١} \text{أ}^{ن-١} \text{ب} + \dots + م_{ر} \text{أ}^{ن-ر} \text{ب}^{ر} + \dots$$

$$+ م_{ن} \text{ب}^{ن}$$

(١) معامل $\text{أ}^{ن}$ = $م_{٠}$ = ١ ، لأنه لا يوجد إلا طريقة واحدة لاختيار العدد« أ »

من كل عامل من هذه العوامل .

(٢) لإيجاد $م_{١}$ ، نلاحظ أنه علينا أن نختار « أ » من (ن − ١) من العوامل ،

وذلك يتم بطرق عددها $\binom{ن}{ن-١}$ أو $\binom{ن}{١}$. إذاً $م_{١} = \binom{ن}{١}$

(٣) لإيجاد $م_{ر}$ ، علينا أن نختار « أ » من (ن − ر) من العوامل ، وذلك يتم بطرق

عددها $\binom{ن}{ن-ر}$ أو $\binom{ن}{ر}$ ،

إذاً $م_{ر} = \binom{ن}{ر}$

أي أن النظرية صحيحة .

نلاحظ أن معامل الحد الذي ترتيبه (ر + ١) في مفكوك ذات الحدين ، هو عدد

التوافيق $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$. ولذا اتفق على أن نسمي $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ بمعاملات ذات الحدين .

نتيجة (٨ – ٦)

بما أن $\text{أ} + \text{ب} = \text{ب} + \text{أ}$.

إذاً $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = (\text{ب} + \text{أ})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{أ}^{\text{ر}} \text{ب}^{\text{ن}-\text{ر}}$.

مثال (٨ – ٢١)

اكتبي مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{٥}}$

الحـــــــــــــــل :

$$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{٥}} = \sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{٥}} \binom{\text{٥}}{\text{ر}} \text{أ}^{\text{٥}-\text{ر}} \text{ب}^{\text{ر}}$$

$$= \text{أ}^{\text{٥}} + \binom{\text{٥}}{\text{١}} \text{أ}^{\text{٤}} \text{ب} + \binom{\text{٥}}{\text{٢}} \text{أ}^{\text{٣}} \text{ب}^{\text{٢}} + \binom{\text{٥}}{\text{٣}} \text{أ}^{\text{٢}} \text{ب}^{\text{٣}} +$$

$$\binom{\text{٥}}{\text{٤}} \text{أ} \text{ب}^{\text{٤}} + \text{ب}^{\text{٥}}$$

$$= \text{أ}^{\text{٥}} + \text{٥} \text{أ}^{\text{٤}} \text{ب} + \text{١٠} \text{أ}^{\text{٣}} \text{ب}^{\text{٢}} + \text{١٠} \text{أ}^{\text{٢}} \text{ب}^{\text{٣}} + \text{٥} \text{أ} \text{ب}^{\text{٤}}$$

$$+ \text{ب}^{\text{٥}} .$$

مثال (٨ – ٢٢)

اكتبي مفكوك $(١ + ٢\text{س})^{٤}$.

الحـــــــل :

$$(١ + ٢\text{س})^{٤} = \sum^{٤} \binom{٤}{ر} (٢\text{س})^{ر} = \sum^{٤} \binom{٤}{ر} ٢^{ر}\text{س}^{ر}$$

$$= ١ + \binom{٤}{١} ٢\text{س} + \binom{٤}{٢} ٢^{٢}\text{س}^{٢} + \binom{٤}{٣} ٢^{٣}\text{س}^{٣}$$

$$+ ٢^{٤}\text{س}^{٤}$$

$$= ١ + ٨\text{س} + ٢٤\text{س}^{٢} + ٣٢\text{س}^{٣} + ١٦\text{س}^{٤}$$

مثال (٨ – ٢٣)

احسبي قيمة $(١,٠٣)^{١٠}$ مقربةَ لثلاثة أرقام عشرية .

الحـــــــل :

$$(١,٠٣)^{١٠} = (١ + ٠,٠٣)^{١٠} = \sum^{١٠} \binom{١٠}{ر} (٠,٠٣)^{ر}$$

$$= ١ + \binom{١٠}{١} \frac{٣}{١٠٠} + \binom{١٠}{٢} \times \frac{٩}{١٠^{٤}} + \binom{١٠}{٣} \times \frac{٢٧}{١٠^{٦}}$$

$$+ \cdots + \frac{٣^{١٠}}{١٠^{٢٠}}$$

= ١ + ٠,٣ + ٠,٠٤٠٥ + ٠,٠٠٣٢٤ + ٠,٠٠٠١٧٠١ + ٠٠٠٠

$\simeq$ ١,٣٤٣٩١٠١

$\simeq$ ١,٣٤٤

ملاحظة (٨ – ٣)

توقفنا في الفك عند الحد الخامس لظهور ثلاثة أصفار عن يمين الفاصلة العشرية ، حيث أن المطلوب التقريب لثلاثة أرقام عشرية .

مثال (٨ – ٢٤)

اكتبي الحد العاشر من مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢\,\text{س}}\right)^{١٣}$ ، **حيث س $\neq$ ٠**

الحـــــــــــل :

$$\text{الحد العاشر} = \binom{١٣}{٩}\left(\text{س}^{٢}\right)^{١٣-٩}\left(\frac{١}{٢\,\text{س}}\right)^{٩}$$

$$= \binom{١٣}{٤}\,\text{س}^{٨} \times \frac{١}{٢^{٩}\,\text{س}^{٩}}$$

$$= \frac{١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{١}{٢^{٩}\,\text{س}}$$

$$= \frac{٧١٥}{٥١٢}\,\text{س}^{-١} .$$

تمارين (٨ – ٥)

(١) اكتبي مفكوكات ما يأتي :

(أ) $(أ + ب)^{٦}$ (ب) $(س + ٢ ص)^{٤}$ (حـ) $(س - ص)^{٥}$

(ى) $(س - ٢)^{٣}$ (هـ) $\left(١ - \frac{س}{٢}\right)^{٨}$

(و) $\left(\frac{٢}{س} - \frac{س}{٢}\right)^{٧}$ ، حيث $س \neq ٠$

(ز) $\left(\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ}\right)^{٦}$ ، وكل من أ ، $ب \neq ٠$ (ح) $\left(٣ ص - \frac{١}{٣}\right)^{٥}$

(ط) $\left(\frac{أ^{٢}}{٢} - \frac{٤}{أ}\right)^{٤}$ ، حيث $أ \neq ٠$

(٢) بدون فك ذات الحدين أوجدي الحدود الآتية :

(أ) الحد السابع في مفكوك $(أ + س)^{٨}$

(ب) الحد الخامس في مفكوك $\left(١ - \frac{٢}{٣} س\right)^{١٠}$

(حـ) الحد الخامس في مفكوك $\left(٤ - \frac{س}{٢}\right)^{٧}$

(ى) الحد السادس في مفكوك $\left(س^{٣} - \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{٩}$ ، حيث $س \neq ٠$

(هـ) الحد الاوسط في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٠}$ ، حيث س ≠ ٠

(و) الحدين الاوسطين في مفكوك $\left(٣\text{س} - \frac{١}{٣}\right)^{٩}$.

(٣) بإعطاء أ ، ب قيماً معينة في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ ، أوجدي قيمة كل مما يأتي :

(أ) $\binom{\text{ن}}{١} + \binom{\text{ن}}{٢} + \dots + \binom{\text{ن}}{\text{ن}}$.

(ب) $\binom{\text{ن}}{٠} - \binom{\text{ن}}{١} + \binom{\text{ن}}{٢} - \dots + (-١)^{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ن}}$.

(حـ) $\binom{\text{ن}}{٠} + \frac{١}{٢}\binom{\text{ن}}{١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\binom{\text{ن}}{٢} + \dots + \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ن}}$.

(ء) $\binom{\text{ن}}{٠} - \frac{١}{٢}\binom{\text{ن}}{١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\binom{\text{ن}}{٢} - \dots + (-١)^{\text{ن}}\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ن}}$

(٤) استعملي عدداً كافياً من حدود مفكوكات ذات الحدين للإيجاد قيمة ما يأتي :

مقربة لرقمين عشريين :

(أ) $(١,٠٢)^{٥}$ (ب) $(١,٠٠٤)^{٧}$.

(حـ) $(٠٫٩٧)^{١٠}$ (ى) $(١٫٠٥)^{١٢}$.

(هـ) $(٠٫٩٦)^{٢٠}$ (و) $(١٫٠٠١)^{٣٠}$.

(ز) $(٠٫٩٨)^{١٠}$

٨-٧ الاستنتاج الرياضي

نفرض أن ج (ن) حيث ن ∈ ط جملة رياضية والمطلوب اثبات صحتها

لكل ن ∈ ط مثل :

(أ) $ج_١$ (ن) : ن = ن .

(ب) $ج_٢$ (ن) : $\sum_{١}^{ن}$ ر = $\frac{١}{٢}$ ن (ن + ١) .

نلاحظ أن $ج_١$ (ن) ظاهرة الصحة لكل ن ∈ ط . أما بالنسبة للجملة

$ج_٢$ (ن) ، فإننا نحتاج إلى التأكد من ذلك باعطاء ن القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ... .

أي أن :

$ج_٢$ (١) : $\sum_{١}^{١}$ ر = ١ = $\frac{١}{٢}$ × ١ (١ + ١) = ١ . إذاً $ج_٢$ (١) صحيحة .

$ج_٢$ (٢) : $\sum_{١}^{٢}$ ر = ١ + ٢ = ٣ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ (٢ + ١)

= ٣ . إذاً $ج_٢$ (٢) صحيحة .

$ج_م(٣) : \sum_{ر=١}^{ن} ر = ١ + ٢ + ٣ = ٦ = \frac{١}{٢} \times ٣ (٣ + ١) = ٦$.

إذاً $ج_م$ (٣) صحيحة .

أي أن $ج_م$ (ن) صحيحة عندما ن = ١ أو ٢ أو ٣ . ولكننا لا نستطيع أن نتنبأ بصحتها عندما ن ≤ ٤ إلا بالتجريب، كما فعلنا في حالة $ج_م$ (١)، $ج_م$ (٢) ، $ج_م$ (٣) .

ولما كان من المستحيل إمكان التحقق من صحة الجملة الرياضية $ج_م$ (ن) أيا كان العدد الطبيعي ن ، فقد توصل الرياضيون في سياق دراستهم لنظرية الأعداد الطبيعية إلى نظرية يطلق عليها غالباً مبدأ الاستنتاج الرياضي نوردها فيما يلي :

مبدأ الاستنتاج الرياضي :

لتكن ج (ن) حيث ن ∋ ط ، جملة رياضية . إن ج (ن) تكون صحيحة أياً كان العدد ن ∋ ط إذا تحقق الشرطان التاليان :

(أ) أن تكون الجملة ج (١) صحيحة .

(ب) أن تكون الجملة ج (ك + ١) صحيحة إذا قبلنا مسبقاً بصحة الجملة ج (ك) .

ملاحظة (٨ - ٤)

إذا بدأنا بإثبات صحة ج (أ) بدلاً من ج (١) ، وكان الشرط الثاني في المبدأ مستوفي ، فإن ذلك يثبت صحة ج (ن) لجميع قيم ن ≤ أ

ملاحظة (٨ – ٥)

لا بد من تحقيق الشرطين في المبدأ معاً . وعدم تحقق أحد الشرطين يكفي

لإثبات عدم صحة ج (ن) .

وخطوات البرهان تكون كما يلي :

(١) إثبات صحة ج (١) .

(٢) فرض صحة ج (ك) .

(٣) إثبات صحة ج (ك + ١) .

وبذلك تكون ج (ن) صحيحة للقيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

وهكذا دون توقف أي لجميع قيم ن $\geq$ ١ .

مثال (٨ – ٢٥)

أثبتي صحة الجملة . :

$$\text{ج}(\text{ن}) : \sum_{١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{١}{٢}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ١)\ ،\ \text{ن} \in \text{ط}$$

الحـــــــل :

$$\sum_{١}^{\text{ن}} \text{ر} = ١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ن}\ ،\ \text{ن} \in \text{ط}$$

(١) $\text{ج}(١) : \sum_{١}^{١} \text{ر} = ١ = \frac{١}{٢} \times ١\,(١ + ١) = ١$ ، إذاً ج (١) صحيحة .

(٢) نفرض أن ج (ك) صحيحة . أي أن :

$$\sum_{١}^{ك} ر = ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ك = \frac{١}{٢} ك (ك + ١)$$

(٣) المطلوب إثبات صحة ج (ك + ١) . فإذا أضفنا (ك + ١) إلى طرفي

المساواة $\sum_{١}^{ك} ر = \frac{١}{٢} ك (ك + ١)$ فإن :

الطرف الأيمن يغدو : $\sum_{١}^{ك} ر + (ك + ١)$

$= ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ك + (ك + ١)$

$= \sum_{١}^{ك+١} ر$

= الطرف الأيمن من ج (ك + ١)

والطرف الأيسر يغدو : $\frac{١}{٢} ك (ك + ١) + (ك + ١)$

$= \frac{١}{٢} (ك + ١) (ك + ٢)$

= الطرف الأيسر من ج (ك + ١)

إذاً ج (ن) صحيحة لجميع قيم ن ≥ ١ .

مثال (٨ – ٢٦)

ادرسي صحة الجملة :

ج (ن) : $\sum_{١}^{ن}$ (٢ ر − ١) = ١ + ٣ + ٥ + .. + (٢ ن − ١) = ٣ ن − ٢ .

الحـــــــــل :

نلاحـظ أن كـلاً من ج (١) ، ج (٢) صحيحـة ، ولكن لا يمكـن تحقيـق الشرط الثاني من المبدأ ، وعلى هذا فإن ج (ن) ليست صحيحة لجميع قيم ن ∈ ط .

مثال (٨ − ٢٧)

ادرسي صحة الجملة :

ج (ن) : $\sum_{١}^{ن}$ ٣ ر = ٣ + ٦ + ٩ + ... + ٣ ن = $\frac{٣}{٢}$ ن (ن + ١) − ١

الحـــــــــل :

(١) ج (١) : $\sum_{١}^{١}$ ٣ ر = $\frac{٣}{٢}$ × ١ (١ + ١) − ١ = ٢

وبما أن ٣ ≠ ٢

إذاً ج (١) ليست صحيحة .

(٢) نفرض أن ج (ك) صحيحة ، أي أن :

$$\sum_{١}^{ك} ٣\,ر = ٣ + ٦ + ٩ + \cdots + ٣ك = \frac{٣}{٢}\,ك\,(ك + ١) - ١$$

(٣) المطلوب إثبات صحة ج (ك + ١) : $\sum_{١}^{ك+١} ٣\,ر$

$$= \frac{٣}{٢}\,(ك + ١)\,(ك + ٢) - ١ .$$

بإضافة ٣ (ك + ١) إلى كل من طرفي ج (ك) نجد أن :

الطرف الأيمن يغدو : $\sum_{١}^{ك} ٣\,ر + ٣\,(ك + ١)$

$$= \sum_{١}^{ك+١} ٣\,ر$$

= الطرف الأيمن من ج (ك + ١) .

والطرف الأيسر يغدو :

$$\frac{٣}{٢}\,ك\,(ك + ١) - ١ + ٣\,(ك + ١)$$

$$= \frac{٣}{٢}\,(ك + ١)\,(ك + ٢) - ١$$

= الطرف الأيسر من ج (ك + ١)

إذاً ج (ك + ١) صحيحة .

ولكن رغم صحة ج (ك + ١) ، فإن ج (ن) لا يمكن أن تكون

صحيحة لجميع قيم ن ∋ ط لأن ج (١) ليست صحيحة .

ملاحظة (٨ – ٦)

كان من الممكن التوقف في البرهان بعد الخطوة (١) ، وهذا يكفي لإثبات

عدم صحة الجملة المعطاة لعدم صحة الشرط الأول من المبدأ .

مثال (٨ – ٢٨)

أثبتي صحة الجملة :

ج (ن) : $\underline{|ن} > ٢^{ن}$ ∀ ن ≥ ٤ .

الحـــــــــــل :

لاحظي أن كلا من ج (١) ، ج (٢) ، ج (٣) ليست صحيحة .

(١) ج (٤) : $\underline{|٤} = ٢٤$ ، $٢^{٤} = ١٦$

إذاً $\underline{|٤} > ٢^{٤}$ أي أن :

ج (٤) صحيحة .

(٢) نفرض أن ج (ك) صحيحة ، أي أن :

$\underline{|ك} > ٢^{ك}$ ∀ ك ≥ ٤

(٣) المطلوب إثبات صحة :

ج (ك + ١) : $(ك+١)! > ٢^{ك+١}$

بما أن $(ك+١)! = (ك+١)\,ك! > (ك+١) \times ٢^{ك}$ من (٢) .

$ك + ١ > ٢$ ، $\forall$ $ك \geq ٤$

إذاً $٢^{ك}(ك+١) > ٢^{ك} \times ٢ = ٢^{ك+١}$

إذاً $(ك+١)\,ك! > ٢^{ك}(ك+١) > ٢^{ك+١}$

إذاً $(ك+١)! > ٢^{ك+١}$

وهذا يثبت صحة ج (ك + ١)

وحيث أن ج (٤) صحيحة

إذاً ج (ن) صحيحة لكل $ن \geq ٤$.

مثال (٨ – ٢٩)

أثبتي صحة الجملة :

ج (ن) : $س^{٢ن+١} + ص^{٢ن+١}$ تقبل القسمة على س + ص ، $ن \in ط$

الحـــــــل :

(١) ج (١) : $\frac{س^{٣} + ص^{٣}}{س + ص} = س^{٢} - س\,ص + ص^{٢}$ (بالقسمة العادية)

إذاً ج (١) صحيحة .

(٢) نفرض أن ج (ك) صحيحة ، أي أن :

$$\frac{س^{٢ك+١} + ص^{٢ك+١}}{س + ص} = ع \quad \text{، ومنها}$$

$$س^{٢ك+١} = ع (س + ص) - ص^{٢ك+١}$$

(٣) المطلوب إثبات صحة ج (ك + ١) : $س^{٢ك+٣} + ص^{٢ك+٣}$ تقبل القسمة على س + ص .

$$\frac{س^{٢ك+٣} + ص^{٢ك+٣}}{س + ص}$$

$$= \frac{س^{٢ك+١} \cdot س^٢ + ص^{٢ك+١} \cdot ص^٢}{س + ص}$$

$$= \frac{(ع (س + ص) - ص^{٢ك+١}) س^٢ + ص^{٢ك+١} \cdot ص^٢}{س + ص} \quad \text{من (٢)}$$

(

$$= ع س^٢ + \frac{- ص^{٢ك+١} \cdot س^٢ + ص^{٢ك+١} \cdot ص^٢}{س + ص}$$

$$= ع س^٢ + \frac{ص^{٢ك+١} (ص^٢ - س^٢)}{س + ص}$$

$$= ع س^٢ + ص^{٢ك+١} (ص - س)$$

إذاً ج (ك + ١) صحيحة .

تمارين (٨ − ٦)

أثبتي صحة الجمل الآتية لكل ن $\in$ ط :

(١) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} (ر - ١) = \frac{١}{٢} ن (ن - ١)$.

(٢) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{١}{٦} ن (ن - ١)(٢ن + ١)$.

(٣) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٣} = \left[\frac{ن (ن + ١)}{٢} \right]^{٢}$

(٤) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر - ١)^{٢} = \frac{١}{٣} ن (٢ن - ١)(٢ن + ١)$.

(٥) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر)^{٢} = \frac{٢}{٣} ن (ن + ١)(٢ن + ١)$.

(٦) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر - ١)^{٣} = ن^{٢} (٢ن^{٢} - ١)$

(٧) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{(٢ر - ١)(٢ر + ١)} = \frac{ن}{٢ن + ١}$.

(٨) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} \left(أ + (ر - ١) ء\right) = \frac{١}{٢} ن (٢أ + (ن - ١) ء)$

(٩) ج (ن) : $\sum_{ر=١}^{ن} أ س^{ر-١} = أ \times \frac{س^{ن} - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$.

(١٠) ج (ن) : $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}+1} \binom{\text{ن}}{\text{ر}-1} \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}+1} \text{س}^{\text{ر}-1} = (\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

(١١) ج (ن) : $٢^{٢\text{ن}} - ١$ يقبل القسمة على ٣ .

(١٢) ج (ن) : $٧^{\text{ن}} - ١$ يقبل القسمة على ٦ .

(١٣) ج (ن) : $\text{س}^{\text{ن}} - \text{ص}^{\text{ن}}$ يقبل القسمة على س − ص ، س ≠ ص

(١٤) ج (ن) : $٢^{\text{ن}} > \text{ن}$

(١٥) ج (ن) : $\text{ن}! \leq ٢^{\text{ن}-١}$

الخـــلاصـــــــة

(١) عُرّف مبدأ العد في صورته العامة على النحو التالي :

$\text{ن}(\tilde{\text{س}}_1 \times \tilde{\text{س}}_2 \times .... \times \tilde{\text{س}}_{\text{ك}}) =$

$\text{ن}(\tilde{\text{س}}_1) \times \text{ن}(\tilde{\text{س}}_2) \times ... \times \text{ن}(\tilde{\text{س}}_{\text{ك}})$

(٢) عدد تباديل مجموعة عدد عناصرها ك مأخوذة راءً راءً

$= {}^{\text{ك}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ك}(\text{ك}-١)\,....\,(\text{ك}-\text{ر}+١)$ حيث ر ≤ ك .

(٣) عدد كل المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها ك يساوي $٢^{\text{ك}}$.

(٤) عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها ك ذات ر من العناصر

يساوي $\binom{\text{ك}}{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ك}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$ ، ر ≤ ك .

(٥) الرمز $\sum$ يعنى مجموعاً على النحو التالي :

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر = س_١ + س_٢ + ... + س_ن .$$

ويتمتع بالخاصتين

$$\sum_{١}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \sum_{١}^{ن} س_ر + \sum_{١}^{ن} ص_ر .،$$

$$\sum_{١}^{ن} أ س_ر = أ \sum_{١}^{ن} س_ر ،$$

(٦) مفكوك ذات الحدين :

$$(أ + ب)^{ن} = \sum_{١}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر} = \sum_{١}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{ر} ب^{ن-ر}$$

(٧) مبدأ الاستنتاج الرياضي فى صورته العامة :

لتكن ج (ن) ، حيث ن $\ni$ ط ، جملة رياضية . إن ج (ن) تكون صحيحة اياً كان العدد الطبيعى ن إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) أن تكون الجملة ج (١) صحيحة .

(٢) أن تكون الجملة ج (ك + ١) صحيحة وإذا قبلنا مسبقاً بصحة ج (ك) .

تمارين عامة

(١) كم عدداً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،

٥ ، ٧ إذا كان :

(أ) التكرار مسموح

(ب) التكرار غير مسموح ، وبحيث يكون أي عدد أقل من ٥٠٠٠

(٢) يراد تكوين لجان في مدرسة ثانوية ، بحيث يكون بكل لجنة طالب من كل

صف من الصفوف الثلاثة التي عدد التلاميذ في كل منها ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٠

على الترتيب . كم لجنة يمكن تكوينها ؟

(٣) سبعة أطفال في قاعة بها خمسة أبواب ، بكم طريقة يمكنهم الخروج من

القاعة ؟

(٤) حديقة عامة لها خمسة أبواب. بكم طريقة يستطيع فرد أن يدخل ويخرج :

(أ) من باب مختلف ؟ (ب) من أي باب ؟

(٥) استضاف مدير مدرسة ثلاثة مدرسين وأربعة طلاب ، وجلسوا للطعام

(٧) ٩ قطع من العملات قذفت آنياً ، فبكم طريقة يمكن أن تظهر بها ٤ قطع متفقة في أحد الوجهين ، بينما تتفق خمس في الوجه الآخر ؟

(٨) مجلس إدارة يتكون من ١٠ أشخاص ، بكم طريقة يمكن أخذ قرار باتفاق ٦ أعضاء ضد ٤ ؟

(٩) يراد تقسيم ١٠ كتب مختلفة بين تلميذين أ ، ب بحيث يعطى الأول ٦ كتب ، والثاني ٤ كتب . بكم طريقة يتم هذا التقسيم ؟ وبكم طريقة يتم التقسيم بحيث يأخذ أحد التلميذين ٦ كتب ، والآخر ٤ كتب ؟

(١٠) بكم طريقة يتم توزيع ١٠ كتب مختلفة بين تلميذين أ ، ب ، بحيث يأخذ الأول ٦ ، والثاني ٢ ؟

(١١) أوجدي مفكوك $(س + ٢ س^{٢})^{٧}$.

(١٢) أوجدي مفكوك $\left(١ + \frac{س}{ص} \right)^{٥}$ حيث ص ≠ ٠

(١٣) أوجدي الحد الحادي عشر من مفكوك $\left(\frac{١}{س} - \frac{س}{٣} \right)^{١٥}$ ، حيث س ≠ ٠

(١٤) أوجدي الحد التاسع من مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٨}{س} \right)^{١٧}$ ، حيث س ≠ ٠

(١٥) إحسبي قيمة $(١,٠٢)^{١٢} - (٠,٩٨)^{١٢}$ مقربة إلى رقمين عشريين.

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي ، أثبتي ما يأتي لكل ن ∈ ط :

(١٦) $\text{أ}^{\text{ن}} < \text{ب}^{\text{ن}}$، حيث $٠ < \text{أ} < \text{ب}$.

(١٧) $(١ + \text{أ})^{\text{ن}} \geq ١ + \text{ن}\,\text{أ}$، حيث $\text{أ} > ٠$.

(١٨) $$\sum_{١}^{\text{ن}} \frac{١}{\text{ر}(\text{ر} + ١)} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} + ١}.$$

(١٩) $$\sum_{١}^{\text{ن}} \text{ر}\ \text{ر}! = (\text{ن} + ١)! - ١.$$

(٢٠) $$\sum_{١}^{\text{ن}} \frac{\text{ر}}{(\text{ر} + ١)!} = ١ - \frac{١}{(\text{ن} + ١)!}$$

الباب التاسع

الإحصاء والاحتمالات

٩-١ مقدمة للإحصاء الوصفي

النتائج التى نتوصل إليها في كثير من العلوم، مثل علم الإقتصاد وعلم الإجتماع وعلم النفس وغيرها، تخضع للتجريب والمشاهدة. ويتطلب تقدم هذا النوع من العلوم اتباع أسلوب البحث العلمي. ويسمى الأسلوب الذي نتبعه في تعميم التجربة ومعالجة النتائج، للحصول على قوانين ونظريات علمية جديدة، بالأسلوب الإحصائي للبحث، والإحصاء من أهم وسائل البحث العلمي، وخاصة في العلوم التي يعتمد البحث فيها على دراسة المشاهدات والتوصل إلى نتائج وقوانين.

والنتائج المختلفة للقياس، كالدرجات التي حصلت عليها طالبات في إمتحان ما، أو أسعار السلع، أو مقادير الإنتاج، كل هذه النتائج وغيرها تظل إلى حد كبير عديمة الفائدة والمعنى، ما لم يرد تفسير لها. فإذا علمت مثلاً أن فاطمة قد حصلت على سبعين درجة (من أصل مئة درجة) في إمتحان اللغة العربية، وأن درجتها في الرياضيات كانت خمساً وستين (من أصل ثلاث مئة درجة). فهل يمكن القول بأن مستوى فاطمة في اللغة العربية أفضل من مستواها في الرياضيات؟ وهل يمكن الحكم على مستوى أداء فاطمة في هذين الإمتحانين، كأن نقول مثلاً، إنها جيدة في اللغة العربية ، وضعيفة في الرياضيات؟

العلم الذي نلجأ إليه لتفسير النتائج واستنتاج ما يمكن أن نستنبطه منها هو علم الإحصاء.

ومن ناحية أخرى، كثيراً ما تنشر الصحف اليومية بيانات إحصائية عن التقدم

والزراعي، والإنخفاض في نسبة الأمية. ولكي يدرك الفرد تطور المجتمع الذي يعيش فيه، فإن هذا يتطلب منه الإلمام بالمفاهيم الإحصائية الأساسية. وتهدف هذه الدراسة لمبادئ الإحصاء إلى تحقيق غايتين :

أولاً: التعرف على المبادئ والمفاهيم الأساسية التي تستخدمها الطريقة الإحصائية في البحث العلمي، فيتهيأ لك فهم العالم بطريقة أفضل.

ثانياً: الترغيب في الإستزادة من دراسة هذا العلم هناك تعاريف عدة لعلم الإحصاء، نذكر منها :

(١) الإحصاء هو العلم الذي يزودنا بأساس منطقي لكثير من الطرق التي تساعد في عملية اتخاذ القرار، في حالة عدم وجود معلومات كاملة عن المشكلة التي نقوم بدراستها، والتي نرغب في اتخاذ القرار حيالها.

(٢) الإحصاء هو العلم الذي يبحث في جميع البيانات الخاصة لمختلف الظواهر، وتصنيف هذه البيانات في جداول منظمة، وتمثيلها بيانياً على شكل رسومات أو صور توضيحية ، وكذلك تحليل البيانات واستخلاص النتائج منها، واستخدامها في اتخاذ القرار المناسب، ومقارنة الظواهر بعضها ببعض ومحاولة استنتاج علاقة بينها (ويعتبر هذا التعريف الأشمل للإحصاء).

وقد استخدم الإحصاء منذ زمن بعيد، وكان مقتصراً على جمع البيانات ووضعها في جداول، وتمثيلها في شكل رسومات بيانية أو صور توضيحية. وكان استخدام الإحصاء قاصراً على الحكومات فقط ، حيث كانت تهتم بجمع البيانات، التي

ومع تقدم المدنية ، امتد استخدام الإحصاء إلى كافة المجالات التي تهم الدولة، من أمور اقتصادية واجتماعية وزراعية وصناعية وتعليمية وغيرها، وأصبح أحد العوامل الرئيسية لنجاح الدول، هو استخدام الأساليب الإحصائية لخدمة أهداف التخطيط، الذي أصبح يعتمد على بحوث إحصائية ، يقوم بإعدادها متخصصون في هذا المجال.

ولم يعد استخدام الإحصاء مقصوراً على الحكومات فقط، بل امتد كذلك إلى المشروعات والهيئات الخاصة، التي تصور نشاطها المتنوع في صورة بيانات دورية منظمة، تساعد الإدارة العليا في هذه المؤسسات على اتخاذ قراراتها على أسس علمية سليمة وواقعية.

إن الطرق الحديثة لعلم الإحصاء مفيدة في حل أنواع متعددة من المشاكل. ونعرض فيما يلي بعض الأمثلة لمسائل كثيرة، تستطيع الطرق الإحصائية المساعدة في حلها:

(١) كيفية اختبار مدى تأثير مصل معين.
(٢) كيفية التمييز بين انفجار قنبلة نووية وزلزال صغير من على بعد عدة أميال.
(٣) كيفية معرفة ما إذا كان التغير في الرقم القياسي للمستهلك تغيراً موسمياً أو تغيراً عرضياً.
(٤) مدى تأثير السمنة على طول حياة الإنسان.
(٥) مدى تأثير التدخين في زيادة الإحتمال للإصابة بسرطان الرئة.
(٦) كيفية مراقبة الإنتاج، بحيث يمكن اكتشاف الخلل فور حدوثه.
(٧) معرفة نسبة التالف في إنتاج مصنع كبير، بواسطة عينة صغيرة من الإنتاج.

هذه الأمثلة ، وغيرها كثير، تستطيع الطـــرق الإحصائية المساعدة في إيجــــاد حل لها.وفي الوقت الحاضر، دخل علم الإحـــــصاء في كافة مجالات العلوم المختلفة.وفيما يلي ، نضرب بعض أمثلة لاستخدام الإحصاء في بعض من المجالات.

(أ) علم الاجتماع:

يدخل الإحصاء فـــي النظريات التي تصف الهجرة الداخلية، ومدى تأثيرها على ســلوك المجتمــع، وتصميم عمليــات المعاينة، التي تســاعد على بناء وإختبــار نظريــات النظـــم الاجتماعيــة - تحليــل تكاليف المســاعدات والتأمينــات الاجتماعية - شــرح الفرق في الإتجاه والســلوك بين جماعات من الناس - تصميم وتحليل التجارب لوصف وشرح سلوك الجماعة.

(ب) علم النفس :

يدخل الإحصاء في نظريات التربية، والمشاكل المختلفة المتعلقة بقياسات القدرة على التعلم والذكاء، والصفات الشخصية، والسلوك الطبيعي وغير الطبيعي للأشخاص، وفي إيجاد مقاييس ومعايير لإستخدامها في هذه الحالات.

(جـ) السكان:

يساعد الإحصاء في دراسة تطور مجتمع السكان، عن طريق معدلات المواليد

(د) التعليم:

يساهم الإحصاء في وضع خطط التعليم الحالية وفي المستقبل، وتقدير احتياجاتها من قوى بشرية ومبان ومعامل وأجهزة. وكذلك يساعد على حل مشاكل التعليم، عن طريق توفير البيانات الفعلية التي تلقي الضوء على المشكلة.

(هـ) الاقتصاد:

يساعد الإحصاء على معرفة حجم التجارة، ومصادر القوى العاملة، ومستوى المعيشة، وتحليل سلوك الإنتاج والاستهلاك، ومدى تأثر السوق بتغير الأسعار والقوانين الحكومية.

(و) علم الأحياء:

يستخدم علم الإحصاء في الأبحاث الأساسية والتجارب العملية، التي تتعلق

بتطور الحياة والوراثة .

من هذه الأمثلة القليلة، نستطيع أن نتبين أهمية علم الإحصاء في كافة مجالات الحياة، والطريقة الإحصائية للبحوث العلمية تشتمل على الخطوات التالية:

(١) تحديد موضوع البحث.

(٢) جمع البيانات المطلوبة عن الموضوع قيد البحث.

٩-٢ جمع البيانات

نقصد بجمع البيانات ، الحصول على معلومات رقمية أو وصفية، تتصف بالصحة والدقة عن ظاهرة معينة، من مصدر معين، في فترة زمنية محددة. والبيانات الإحصائية لا تجمع لذاتها، ولكن لخدمة هدف معين، أو لحل مشكلة معينة.

فلدراسة أي مشكلة، لابد أن تتوافر فيها بيانات تفصيلية في صورة رقمية، تساعد في تحديد حجم هذه المشكلة تحديداً واضحاً، حتى يمكن إتخاذ قرارات مناسبة بشأنها.

(أ) مصادر جمع البيانات :

تنقسم المصادر التي تجمع منها البيانات لأي بحث أو دراسة إلى مصادر تاريخية، ومصادر ميدانية. وفيما يلي عرض موجز لكل من هذين النوعين من المصادر.

(١) المصادر التأريخية :

قبل جمع البيانات عن أي مشكلة، لابد وأن تسبقها دراسة وافية للمصادر التأريخية للموضوع محل الدراسة، إذ من المحتمل أن تتوافر البيانات، التي نريد جمعها كلها أو بعضها، في الإحصاءات التي تنشرها الأجهزة الإحصائية، والهيئات المتخصصة في الدولة. ففي هذه الحالات، توفر علينا البيانات، التي نحصل عليها من هذه المصادر، مشقة جمعها من الميدان مرة أخرى، وما يترتب عليه من جهد بشري وتكاليف مادية.

(٢) المصادر الميدانية :

إذا لم يجد الباحث البيانات التي يريدها في أي من المصادر التأريخية، فإنه يلجأ

ويتم جمع البيانات الميدانية بإحدى الطرق الآتية :

أولاً - المقابلة الشخصية : وفي هذه الطريقة يقوم جامع البيانات بمقابلة كل فرد من أفراد البحث، وتوجيه الأسئلة الموجودة في الإستمارة الإحصائية إليه، وتدوين الإجابة في المكان المخصص أمام كل سؤال.

وتمتاز هذه الطريقة بأنها أصلح طرق جمع البيانات في حالة إنتشار الأمية بين أفراد البحث، كما تمكن جامع البيان من التأكد من صحة الإجابات التي نحصل عليها، عن طريق مقارنتها ببعضها.

ثانياً - المراسلة (البريد) : وفي هذه الحالة، تقوم الجهة المسئولة عن البحث بإرسال إستمارات جمع البيانات بالبريد إلى أفراد البحث، مرفقاً بها الإرشادات الخاصة باستيفاء الإستمارة، وموضحاً بها أهداف البحث وأهميته. وعادة يرفق مع الإستمارة مظروف بعنوان الجهة التي تشرف على البحث، وعليه طابع بريد لإعادة الإستمارة بعد استيفائها.

وتصلح هذه الطريقة في المجتمعات التي تقل فيها نسبة الأمية، كما أنها تعطي فرصة كافية لدراسة الأسئلة وتفهمها قبل الرد عليها، علاوة على قلة التكاليف اللازمة لجمع البيانات بهذه الطريقة.

(ب) أسلوب جمع البيانات :

يتم جمع البيانات من الميدان بأحد الأسلوبين التاليين :

أولاً - الحصر الشامل : وفيه يتم جمع البيانات من جميع أفراد محل البحث. ويستخدم هذا الأسلوب عادة في الأبحاث الإحصائية الكبيرة، والتي تجرى على فترات زمنية متباعدة كالتعدادات العامة.

ثانياً - العينات : وفيه يتم جمع البيانات من بعض أفراد المجتمع الذين يختارون بطريقة معينة، بحيث يمثلون المجتمع محل الدراسة أصدق تمثيل. ومن بيانات العينة، تعمم النتائج على مجتمع البحث كله.

ثالثاً - تلخيص المعلومات : بعد جمع البيانات ومراجعة الإستمارات، يبدأ الإعداد لمرحلة إستخراج النتائج وتحليلها. ويتم إستخراج النتائج للأبحاث الصغيرة ، بتبويب الإستمارات يدوياً. إلا أن هذا الأسلوب يستحيل استخدامه في حالة الأبحاث الكبيرة، ويستعاض عنه باستخدام الآلات الإحصائية والحاسبات الإلكترونية.

٩-٣ التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني لها

تمر العملية الإحصائية بمراحل متعددة، تبدأ بمرحلة التصميم، ثم جمع البيانات ومراجعتها ميدانياً، وأخيراً مرحلة التجهيز بما تشمله من مراجعة مكتبية وترميز وتثقيف وتبويب البيانات، ثم إعدادها للنشر في جداول إحصائية، تكشف عن الخصائص الرئيسية للمجتمع موضوع الدراســـــــة.

ولكى نضع البيانات في جداول إحصائية يجب :

أولاً : تقسيم البيانات إلى مجموعات متشابهة تسمى " فئات "، ونضع في كل فئة المفردات التي تنتمي إليها (أو بمعنى آخر نوجد عدد مرات تكرار الفئات)، ثم نضع هذه الفئات وتكراراتها في جداول.

ويطلق على هذه الفئات لفظ **(الفئات التكرارية)**. وكل جدول يحتوي على عدد من هذه الفئات التكرارية يسمى **(جدولاً تكرارياً)**.

وقبل الدخول في طريقة عمل الجداول التكرارية، يجب أولاً ، أخذ فكرة

وبصفة عامة تنقسم البيانات الإحصائية إلى :

(١) بيانات وصفية (نوعية) :

وهي بيانات لا تأخذ أرقاماً عددية، بل تكون كلها صفات، مثل الحالة التعليمية، والمهنة والنشاط الاقتصادي .... إلخ. فمثلاً، بيانات الحالة الزواجية تنحصر في (لم يتزوج بعد - متزوج - مطلق - أرمل). وكذلك الحالة بالنسبة لباقي البيانات الوصفية الأخرى. وهذه البيانات يتم وضعها في الجدول التكراري بحصر الصفات التي تشملها هذه البيانات، وإيجاد المفردات التي تنتمي لكل فئة.

مثال (٩ - ١)

البيانات الآتية تمثل المرتبة الأكاديمية لعينة من ٣٠ من أعضاء هيئة التدريس في إحدى الجامعات.

انظر الجدول (٩-١):

أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك	أستاذ
مساعد				
محاضر	أستاذ	أستاذ مساعد	محاضر	
أستاذ مشارك				
أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	أستاذ مشارك	أستاذ	
أستاذ مساعد				
أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	
أستاذ				
أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك	

(١) نرسم جدولاً من ثلاثة أعمدة، كما في الجدول (٩-٢): الأول المرتبة الأكاديمية، والثاني يخصص لوضع العلامات أمام المراتب الأكاديمية، والثالث لعدد أعضاء هيئة التدريس (أو عدد العلامات في العمود الثاني).

(٢) نضع المرتبة الأكاديمية التي لدينا، وهي أستاذ - أستاذ مشارك - أستاذ مساعد - محاضر ... في العمود الأول من الجدول، ثم نأخذ المرتبة الأكاديمية لكل عضو من هيئة التدريس واحداً بعد الآخر ، ونضع شرطة مائلة (/) لكل مرتبة نأخذها أمام الصفة المناظرة ، وذلك في العمود الثاني للجدول، وتسهيلاً لعملية العد، نضع الشرطة الخامسة على صورة خط مائل عكسي يقطع الخطوط الأربعة السابقة، فنحصل على ما يسمى بالحزمة.

جدول التفريغ

المرتبة الأكاديمية	العلامات	عدد أعضاء هيئة التدريس (التكرار)
أستاذ	////	٤
أستاذ مشارك	~~////~~ ~~////~~	١٠
أستاذ مساعد	//// ~~////~~	٩
محاضر	// ~~////~~	٧
الجملة	ــــــــــ	٣٠

جدول (٩ - ٢)

(٣) نترجم العلامات الموجودة أمام كل مرتبة علمية إلى أرقام (تكرارات)، ونضعها في العمود الثالث من الجدول. ويجب أن يكون عدد التكرارات لعدد الحالات التي أعد لها الجدول . ويسمى الجدول في هذه الحالة بجدول التفريغ.

(٤) نأخذ العمودين الأول والثالث من جدول التفريغ السابق، فنحصل على " الجدول التكراري" كما في الجدول (٩ - ٣) .

الجدول التكراري

المرتبة الأكاديمية	عدد أعضاء هيئة التدريس (التكرار)
أستاذ	٤
أستاذ مشارك	١٠
أستاذ مساعد	٩
محاضر	٧
الجملة	٣٠

جدول (٩ - ٣)

ويسمى هذا الجدول " جدولاً تكرارياً بسيطاً " ، لأن البيانات التي يشملها تتوزع حسب خاصة أو صفة واحدة فقط، وهي المرتبة الأكاديمية.

(ب) البيانات الكمية (الرقمية) :

وهي البيانات التي تأخذ قيماً عددية، وذلك إذا كانت الظاهرة موضوع الدراسة قابلة للقياس مثل بيانات السن والدخل وعدد أفراد الأسرة .. إلخ.

ولتبويب البيانات الكمية في جداول تكرارية، نقسم البيانات إلى مجموعات متشابهة، تسمى فئات، ونضع في كل فئة المفردات التي تنتمي إليها، ثم نضع هذه الفئات في العمود الأول من الجدول، فنحصل على الجدول التكراري. ولا توجد قاعدة محددة لتعيين طول الفئة، أو عدد الفئات، في الجدول التكراري. وعملية تحديد عدد الفئات وطول كل منها، وإن كانت تعتمد على الخبرة في المقام الأول، إلا أنه يمكن القيام بها بطرح أصغر قيمة من أكبر قيمة في البيانات المراد تلخيصها فنحصل على ما يسمى **بالمدى المطلق للبيانات**، وهو المدى الذي تنتشر فيه بيانات البحث، ثم نقسمه إلى

عدد مناسب من الفئات (لا يقل عن ست ولا يزيد عن اثنتي عشرة) آخذين في الإعتبار ما يلي :

(١) ألاَّ يكون طول الفئة كبيراً، وبالتالي عدد الفئات صغيراً.

(٢) ألاَّ يكون طول الفئة صغيراً، وبالتالي عدد الفئات كبيراً، فينتفي الهدف من تلخيص البينات في فئات. وبذلك نحصل على طول كل فئة، مع ملاحظة أن الفئة الأولى لابد وأن تشتمل أو تبدأ بأصغر قيمة، وأن تشمل الفئة الأخيرة أو تنتهي بأكبر قيمة، حسب طبيعة البيانات.

مثال (٩ - ٢)

البيانات الآتية توضح كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم بالمليمتر المكعب :

٧١	١٠٠	٨٠	٩٣	٧٠	١١٥	٦٢	١١٦	٧٨	٩٦
٨٣	٩٤	٧٠	٩٧	٩٥	٩٥	٩٣	٩٦	٩٧	١٢٨
٩٨	٨٤	٦٦	١٠٧	٨٢	٩٧	٧٢	١١٨	٩٨	١٠١
٨٣	١١٠	٩٩	٩٨	٩٢	١٢٥	١١٧	٩٣	٧٣	١١٩
٩٩	٨٥	٨٤	٦٥	١٠٦	٧٧	١٠٨	١١٣	٩٤	٧١
٨٠	٩٠	٧٢	١٢٠	١١١	٩٢	١٠٢	٧٤	٩٩	١١٤
٩١	٩٢	٨٥	١٠١	٨١	٦٧	٩١	١١٢	١٢٢	١٠٩
٨٦	٩٠	٨٦	٨٨	٧٧	٩٥	٧٢	١٠٥	٨٩	٧٥
١٢٩	١٠٢	٨٧	٩١	١٠٣	١٠٣	٨٨	٦٩	٨٦	١٠٤
٧٥	٩٠	٨٧	١٠٩	٩٦	٧٩	٨٢	٨٩	١٠٥	٩٧

جدول (٩-٤)

لتصنيف هذه البيانات في جدول تكراري، نتبع الخطوات التالية:

(١) نحسب المدى المطلق للبيانات، وهو ١٢٩ – ٦٢ = ٦٧ مليمتراً مكعباً.

(٢) نختار طولاً مناسباً للفئة، وذلك حسب الملاحظات السابقة.

(٣) بقسمة المدى المطلق على طول الفئة، نحصل على عدد الفئات التي يشملها الجدول التكراري.

وفي هذا المثال أنسب طول للفئة هو (١٠)، وبذلك يكون عدد الفئات التي لدينا سبع فئات متساوية، طول كل منها ١٠.

تشمل الفئة الأولى كمية الأمطار من ٦٠ إلى ٦٩، وتكتب ٦٠ – ٦٩. وتشمل الفئة الثانية كمية الأمطار من ٧٠ إلى ٧٩، وتكتب ٧٠ – ٧٩ . وهكذا ...

الفئة الأخيرة تشمل كمية الأمطار من ١٢٠ إلى ١٢٩ ، وتكتب ١٢٠ – ١٢٩.

وكتابة الفئات بالصورة :

٦٠ – ٦٩ ، ٧٠ – ٧٩ ، ٨٠ – ٨٩ ، ..... ، ١٢٠ – ١٢٩

يجعل هناك فجوة بين كل فئة والتالية لها، مما قد يؤثر على توزيع البيانات على الفئات المختلفة، ويؤدي إلى الكثير من المشاكل في الحياة العملية. فمثلاً، إذا كانت كمية الأمطار التي سقطت في يوم ما هو ٧٩,٥ مليمتر مكعب، ففي أي فئة تقع؟ هل الفئة الثانية، أم الفئة الثالثة؟ وللتغلب على هذه المشكلة، نتفق على كتابة الفئات بالصورة :

٦٠ – ، ٧٠ – ، ٨٠ – ، ..... ، ١٢٠ – .

أي أن الفئة الأولى تشمل جميع القيم من ٦٠ حتى أقل من ٧٠ (بداية الفئة التالية مباشرة)، والفئة الثانية تشمل جميع القيم من٧٠ حتى أقل من ٨٠ (بداية الفئة التالية مباشرة)، وهكذا بالنسبة لباقي الفئات، حتى الفئة الأخيرة، فتشمل جميع القيم من ١٢٠حتى أقل من ١٣٠ . وبالرغم من عدم وجود فئة تالية للفئة الأخيرة (١٢٠ –)، فإن

(٤) نرسم جدولاً تفريغياً كما في حالة البيانات الوصفية، مع إختلاف واحد، وهو أن العمود الأول يشتمل على فئات المتغير (كمية الأمطار في هذا المثال) ثم توزع البيانات التي لدينا على الفئات التي تنتمي إليها بنفس الأسلوب السابق شرحه في حالة البيانات الوصفية، فنحصل على الجدول التفريغي (٩-٥).

جدول تفريغي يوضح توزيع كمية الأمطار التي سقطت
على أحد أحياء مدينة خلال ١٠٠ يوم .

فئات الأمطار بالمليمتر المكعب	العلامات	عدد الأيام (التكرار)
	////\	٥
٦٠ —	////\ ////\ ////\	١٥
٧٠ —	////\ ////\ ////\ ////\	٢٠
٨٠ —	////\ ////\ ////\ ////\ ////\ ////\	٣٠
٩٠ —	////\ ////\ ////\	١٥
١٠٠ —	////\ ////\	١٠
١١٠ —	////\	٥
١٢٠ — ١٣٠	———	١٠٠

جدول (٩-٥)

(٥) باستبعاد العمود الأوسط من الجدول التفريغي (٩ - ٥) ، نحصل على الجدول التكراري المطلوب (٩-٦)

توزيع كمية الأمطار التي سقطت على أحد أحياء مدينة ما خلال ١٠٠ يوم .

فئات كمية الأمطار بالمليمتر المكعب	عدد الأيام (التكرار)
٦٠ —	٥
٧٠ —	١٥
٨٠ —	٢٠
٩٠ —	٣٠
١٠٠ —	١٥
١١٠ —	١٠
١٢٠ — ١٣٠	٥
الجملة	١٠٠

جدول (٩-٦)

ومما تجدر الإشارة إليه في هذا المجال، أنه بعد توزيع المفردات على الفئات داخل الجدول التكراري ، تختفي هذه المفردات وتضيع معالمها. وكل ما يمكن معرفته عن أي منها، أنها واحدة من مفردات فئة معينة في الجدول، وتأخذ قيمة مركز (منتصف) هذه الفئة. ومركز الفئة يعرف بأنه الحد الأدنى للفئة (بداية الفئة) + $\frac{١}{٢}$ طول الفئة، أو :ـ

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{بداية الفئة (الحد الأدنى لها) + نهاية الفئة (الحد الأعلى لها)}}{٢}$$

ففي الجدول (٩-٦) ، نجد أن هناك خمسة أيام سقط في كل منها ٦٥ مليمتراً

ضرورة توخي الدقة عند تحديد عدد الفئات. والجدول (٩-٦) يسمى « جدولاً تكرارياً بسيطاً »، لأن البيانات تمثل ظاهرة واحدة فقط، وهي توزيع كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم .

بعد أن ينتهي الباحث من جمع البيانات من الميدان ، وتبويبها في جداول تكرارية تشتمل على التوزيع التكراري للبيانات الخاصة بالظاهرة محل الدراسة، فإنه يقوم بعرض هذه الجداول بيانياً. ويتم عرض التوزيعات التكرارية بيانياً بإحدى الطرق الآتية :

(١) المدرج التكراري.

(٢) المضلع التكراري.

(٣) المنحنى التكراري.

وفيما يلي عرض لكل من هذه الطرق.

(١) المدرج التكراري:

لرسم المدرج التكراري نتبع الخطوات الآتية:

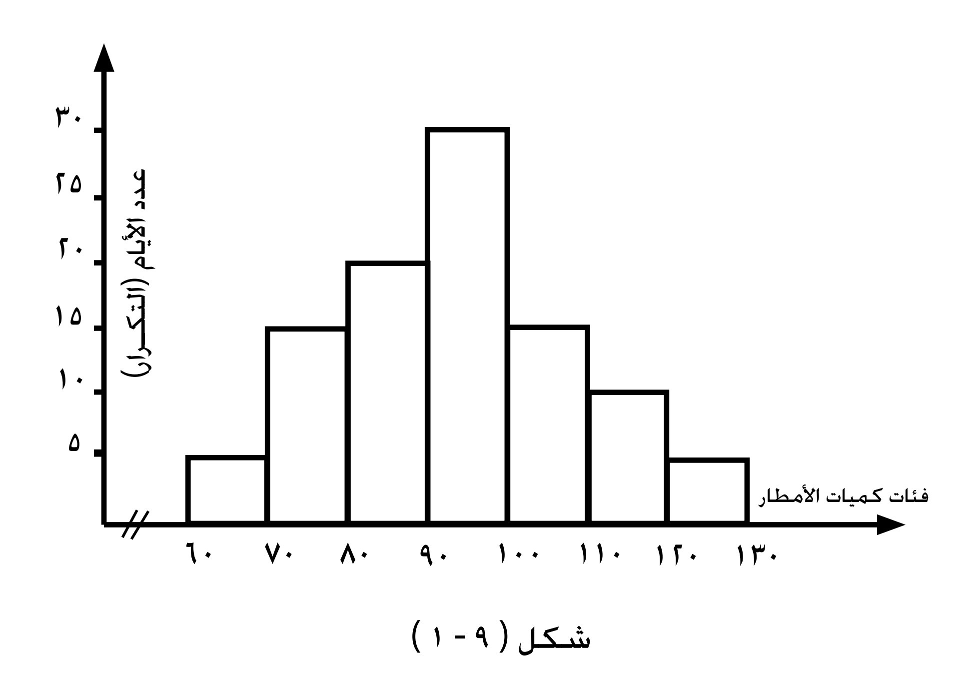
(أ) نرسم محورين متعامدين، يخصص المحور الأفقي للفئات (قيم المتغير)، والمحور الرأسي للتكرارات (عدد المفردات).

(ب) نقسم المحور الأفقي إلى أقسام متساوية، كل قسم عبارة عن طول الفئة، بحيث يكفي لتمثيل كافة الفئات، وندرج المحور الرأسي ابتداء من الصفر، بحيث يسمح بظهور أكبر تكرار في الجدول التكراري.

(جـ) نرسم مستطيلاً على كل فئة، قاعدته تساوي طول الفئة، وإرتفاعه يساوي تكرار هذه الفئة. وبذلك نحصل على شكل هو عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة، وهو ما يعرف بالمدرج التكراري.

فإذا أردنا رسم المدرج التكراري للمثال (٩-٢)، نجد أن التوزيع يشتمل على سبع فئات متساوية. ولذلك نقسم المحور الأفقي إلى سبعة أقسام متساوية، تبدأ من ٦٠ حتى ١٣٠، وندرج المحور الرأسي ابتداء من الصفر وحتى ٣٠ ، وهو أكبر تكرار في الجدول، ثم نرسم على كل فئة مستطيلاً قاعدته طول الفئة، وارتفاعه التكرار المقابل لهذه الفئة. وبذلك نحصل على الشكل (٩-١).

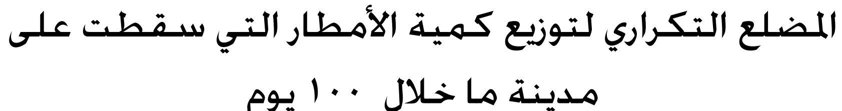
المدرج التكراري لتوزيع كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم .

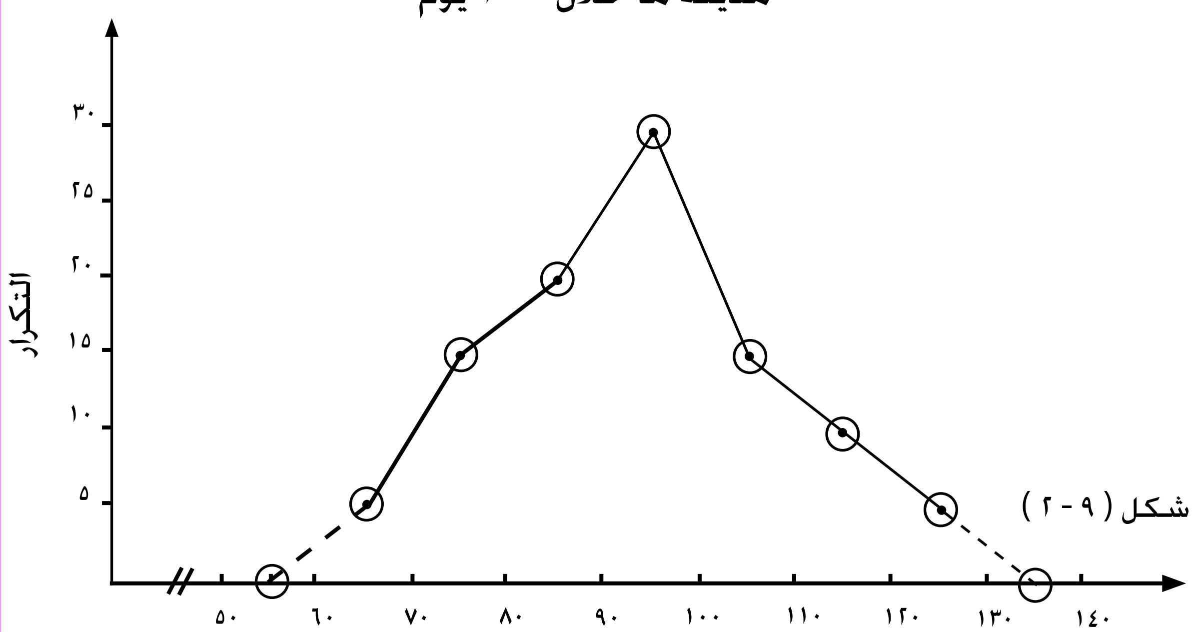


شكل (٩ - ١)

(٢) المضلع التكراري:

ونحصل عليه بتقسيم المحورين كما في حالة المدرج التكراري تماماً. ثم نضع نقطاً في المستوى، بحيث يكون الإحداثي السيني لأي نقطة هو مركز الفئة، والإحداثي الصادي هو التكرار المناظر لهذه الفئة، ونصل هذه النقط بقطع مستقيمة، فنحصل على المضلع التكراري كما في الشكل (٩-٢) الذي يمثل المضلع التكراري للمثال (٩-٢) .



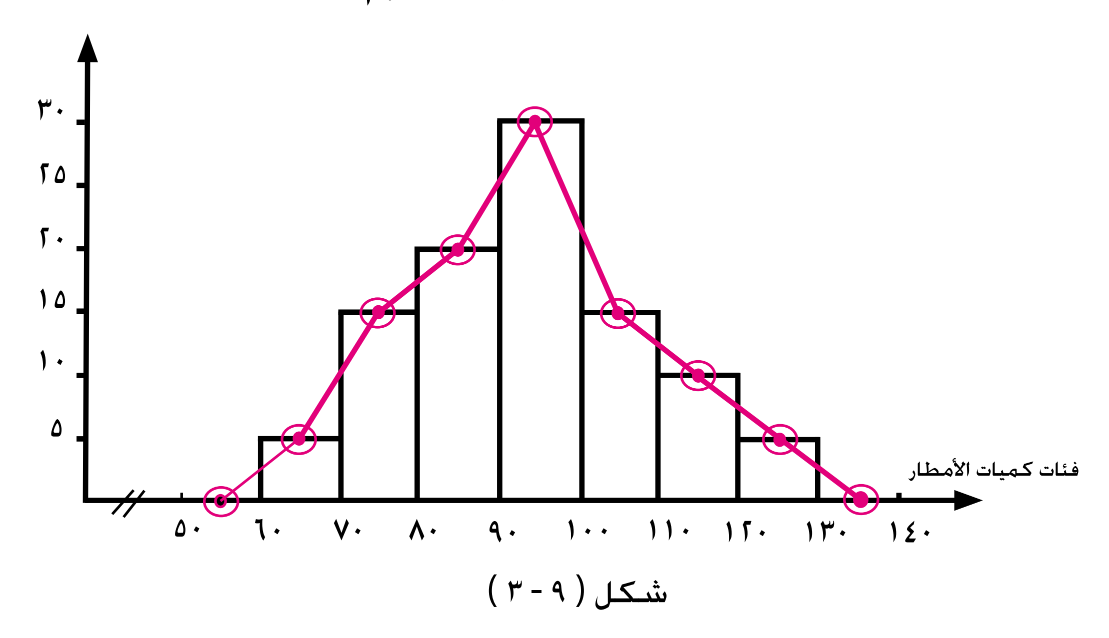


شكل (٩ - ٢)

ويحسن إغلاق المضلع التكراري مع المحور الأفقي، وذلك بتصور أن هناك فئة سابقة للفئة الأولى ، وفئة لاحقة للفئة الأخيرة، وتكرار كل منهما صفر ، ونصل مركز هاتين الفئتين بطرفي المضلع، فيتم إغلاقه.

ويمكن رسم المضلع التكراري من المدرج التكراري ، وذلك بوضع نقط عند منتصف القواعد العليا للمستطيلات في المدرج التكراري . ثم نصل هذه النقط بمستقيمات، فنحصل على المضلع التكراري، ويتم إغلاقه بنفس الطريقة السابقة كما في الشكل (٩-٣).

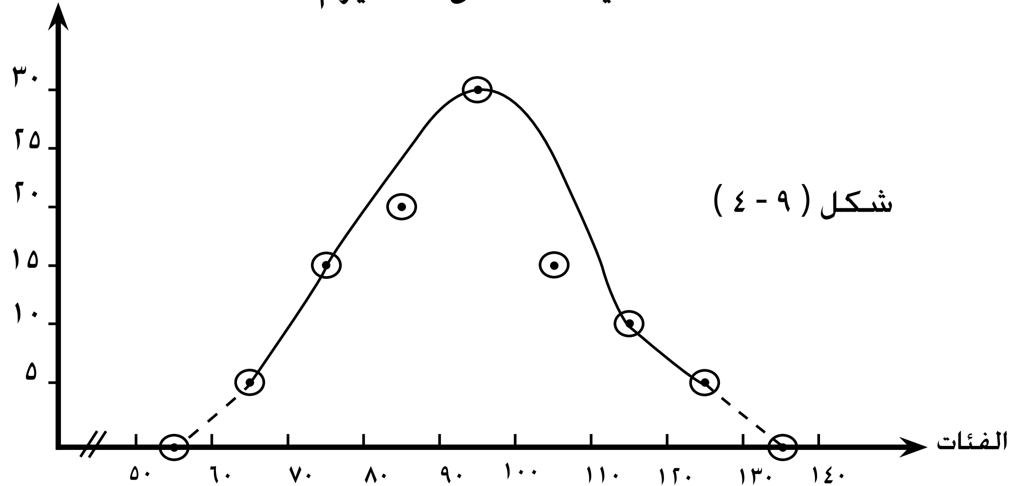
المدرج والمضلع التكراري لتوزيع كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم .



شكل (٩ - ٣)

(٣) المنحنى التكراري :

يتم الحصول عليه بتقسيم المحورين الأفقي والرأسي، وتعيين مواقع النقط كما في حالة المضلع التكراري تماماً، ثم نرسم منحنياً ممهداً يمر بأكبر عدد ممكن من هذه النقط، ويمر بتوازن خلال باقي النقط، ويتم إغلاقه كما في حالة المضلع التكراري. والشكل (٩-٤) يوضح المنحنى التكراري للمثال (٩-٢).



شكل (٩ - ٤)

٩-٤ الجداول التكرارية المتجمعة وتمثيلها بيانياً

أوضحنا فيما سبق أن الجدول التكراري يعطي معلومات تفصيلية عن توزيع المفردات على فئات داخل الجدول. فهو يعطينا عدد المفردات في كل فئة على حدة ولكننا في بعض الأحيان نحتاج إلى معرفة بيانات أخرى إجمالية، كأن نرغب في معرفة عدد المفردات التي تكون قيمتها أقل أو أكبر من قيمة معينة. ففي الجدول (٩-٦) ، قد يهمنا مثلاً معرفة عدد الأيام التي سقطت فيها كمية من الأمطار أقل من ٩٠ مليمتراً مكعباً، فنجد أنها ٤٠ يوماً. وهذا العدد هو مجموع التكرارات بالفئات الثلاث الأولى بالجدول التكراري . وكذلك قد يهمنا معرفة عدد الأيام التي سقط فيها ١١٠ مليمتراً مكعباً فأكثر من الأمطار، فنجد أنها ١٥ يوماً، وهو مجموع التكرارين بالفئتين الأخيرتين من الجدول وهكذا.

ولتكملة هذه المعلومات وعرضها بشكل منظم، نضعها في جدول يسمى «الجدول التكراري المتجمع» . وفيه تجمع التكرارات على التوالي

فإذا بدأنا بتجميع التكرارات من جهة الفئات الصغيرة إلى الكبيرة (أي من أعلى إلى أسفل الجدول)، سمي التكرار « متجمعاً صاعداً » . وإذا بدأنا بتجميع التكرارات من جهة الفئات الكبيرة إلى الصغيرة (أي من أسفل إلى أعلى الجدول)، سمي التكرار « متجمعاً نازلاً » . وفي حالة التوزيع التكراري المتجمع الصاعد، نذكر الفئات بالصورة « أقل من الحد الأعلى للفئة »، ويكون التكرار المقابل للفئة الأخيرة مساوياً لمجموع التكرارات. أما في حالة التوزيع التكراري المتجمع النازل، فنذكر الفئات بالصورة « الحد الأدنى للفئة فأكثر »، ويكون التكرار المقابل للفئة الأولى مساوياً لمجموع التكرارات.

والجدولان (٩-٧) ، (٩-٨) يوضحان التوزيعين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل للمثال (٩-٢)

الجدول التكراري المتجمع الصاعد
لكمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما

أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٦٠	٠
« ٧٠	٥
« ٨٠	٢٠
« ٩٠	٤٠
« ١٠٠	٧٠
« ١١٠	٨٥
« ١٢٠	٩٥
« ١٣٠	١٠٠

جدول (٩-٧)

الجدول التكراري المتجمع النازل
لكمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما

الحد الأدنى للفئة فأكثر		التكرار المتجمع النازل
٦٠	فأكثر	١٠٠
٧٠	((	٩٥
٨٠	((	٨٠
٩٠	((	٦٠
١٠٠	((	٣٠
١١٠	((	١٥
١٢٠	((	٥
١٣٠	((	صفر

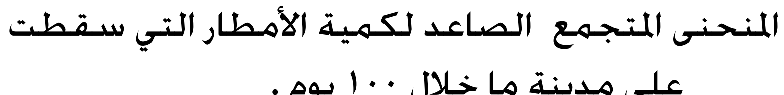
جدول (٩ – ٨)

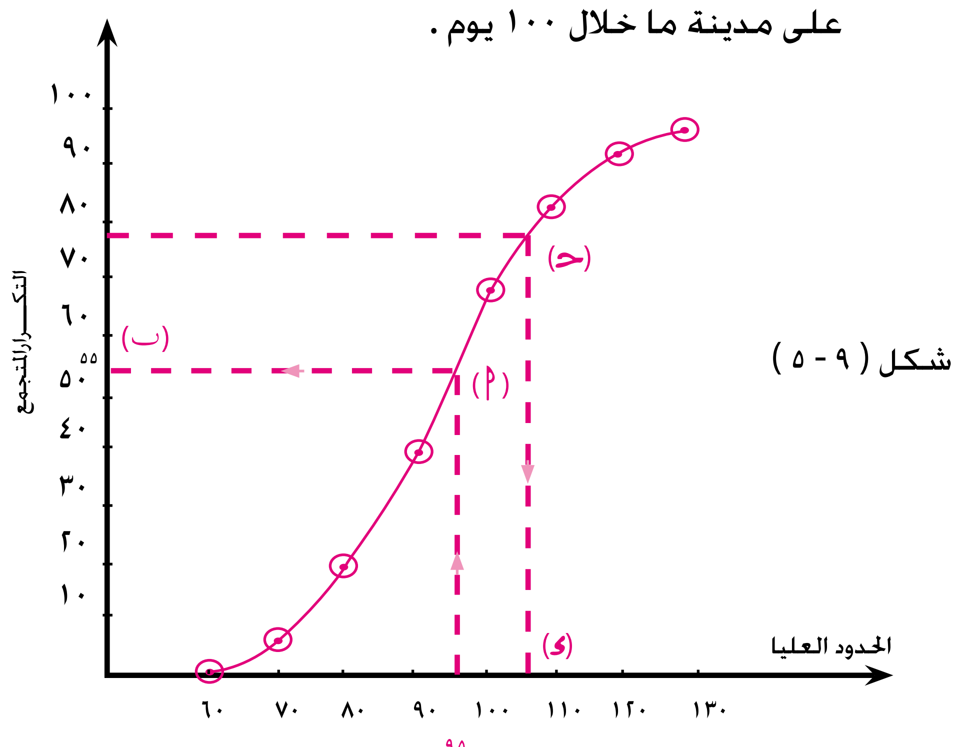
تمثيل التوزيعات التكرارية المتجمعة بيانياً :

بيّنا فيما سبق كيفية تكوين الجداول التكرارية الصاعدة والنازلة من الجدول التكراري البسيط. ولعرض بيانات هذه الجداول التكرارية المتجمعة بيانياً، نرسم محورين متعامدين كالمعتاد. ونخصص المحور الأفقي للفئات، والمحور الرأسي للتكرارات. مع مراعاة أن يتسع المحور الرأسي للتكرار الكلي، وليس لأكبر تكرار لأن أكبر عدد في محور التكرار المتجمع يكون مساوياً للتكرار الكلي للمفردات.

ولتمثيل بيانات الجدول التكراري المتجمع الصاعد بالجدول (٩ – ٧) بيانياً، نخصص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات، والمحور الرأسي للتكرار المتجمع

الصاعد. ثم نرصد النقط على الرسم كالمعتاد ونصل بينها بمنحنى ممهد. فنحصل على المنحنى المتجمع الصاعد. ويسمى المنحنى صاعداً لأن التكرارات المتجمعة تكون في ازدياد مستمر. والشكل (٩ – ٥) يبين المنحني المتجمع الصاعد للجدول (٩ – ٧) .





شكل (٩ - ٥)

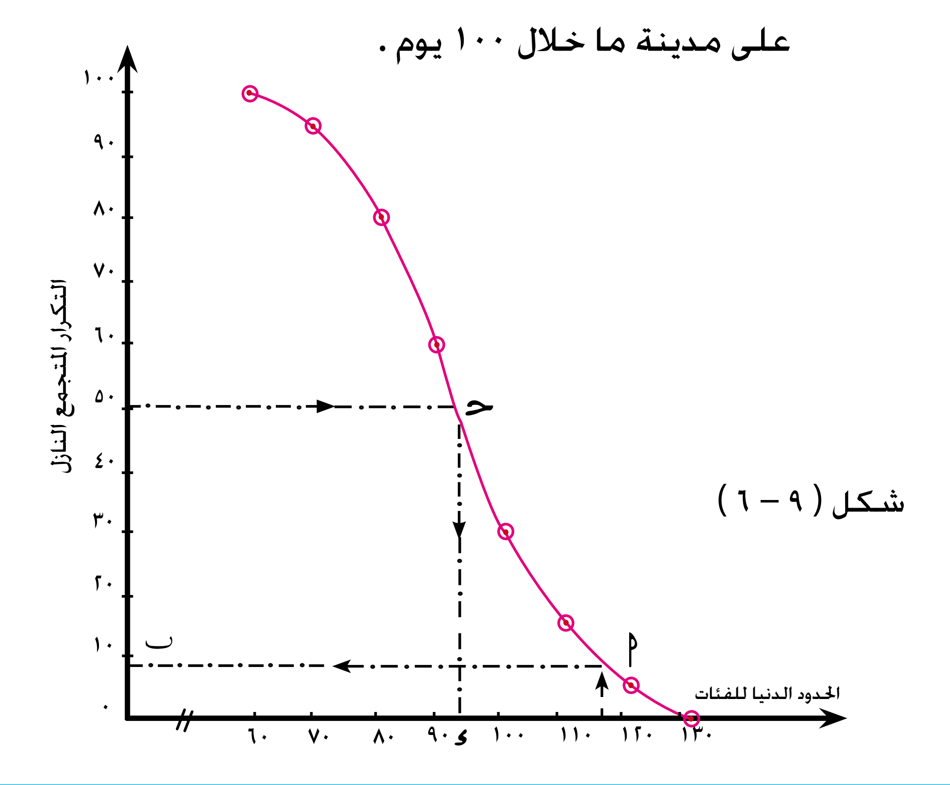
ويلاحظ أننا أخذنا فئة سابقة لأصغر فئة وتكرارها صفراً لإغلاق المنحنى مع المحور الأفقي . ومن الرسم يمكن الحصول على بعض النتائج التي من أجلها يتم تكوين الجدول التكراري المتجمع فمثلاً ، لمعرفة عدد الأيام التي سقطت فيها كمية من الأمطار أقل من ٩٥ مليمتراً مكعباً ، نقيم عموداً على المحور الأفقي عند النقطة ٩٥ يقابل المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة أ ، نمد من عندها مستقيماً يوازي المحور الأفقي. ويقابل المحورالرأسي في نقطة ب. فتكون هي عدد الأيام المطلوبة.

وبالعكس ، إذا أردنا معرفة الحد الأعلى لكمية الأمطار التي سقطت في ٧٨ يوماً الأولي ، فإننا نرسم مستقيماً من النقطة ٧٨ على المحورالرأسي موازياً المحور الأفقي ، ليقابل المنحنى في نقطة ح ، فنسقط منها عموداً على المحور الأفقي ليقابله في نقطة ى ، تكون هي الحد الأعلى المطلوب لكمية الأمطار .

ولتمثيل بيانات الجدول التكراري المتجمع النازل في الجدول (٩ – ٨) بيانياً ، نخصص المحور الأفقي للحدود الدنيا للفئات ، والمحورالرأسي للتكرار المتجمع النازل، ثم نعين النقط على المستوى كالمعتاد ، ونصل بينها بمنحنى ممهد فنحصل على المنحنى المتجمع النازل لأن التكرارات المتجمعة تكون في تناقص مستمر، كما في الشكل (٩ – ٦) .

المنحنى المتجمع النازل لكمية الأمطار التي سقطت .

على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم .



شكل (٩ – ٦)

ويلاحظ أننا أخذنا حداً أدنى لفئة لاحقة لأكبر فئة وتكرارها صفراً لإغلاق المنحنى مع المحور الأفقي .

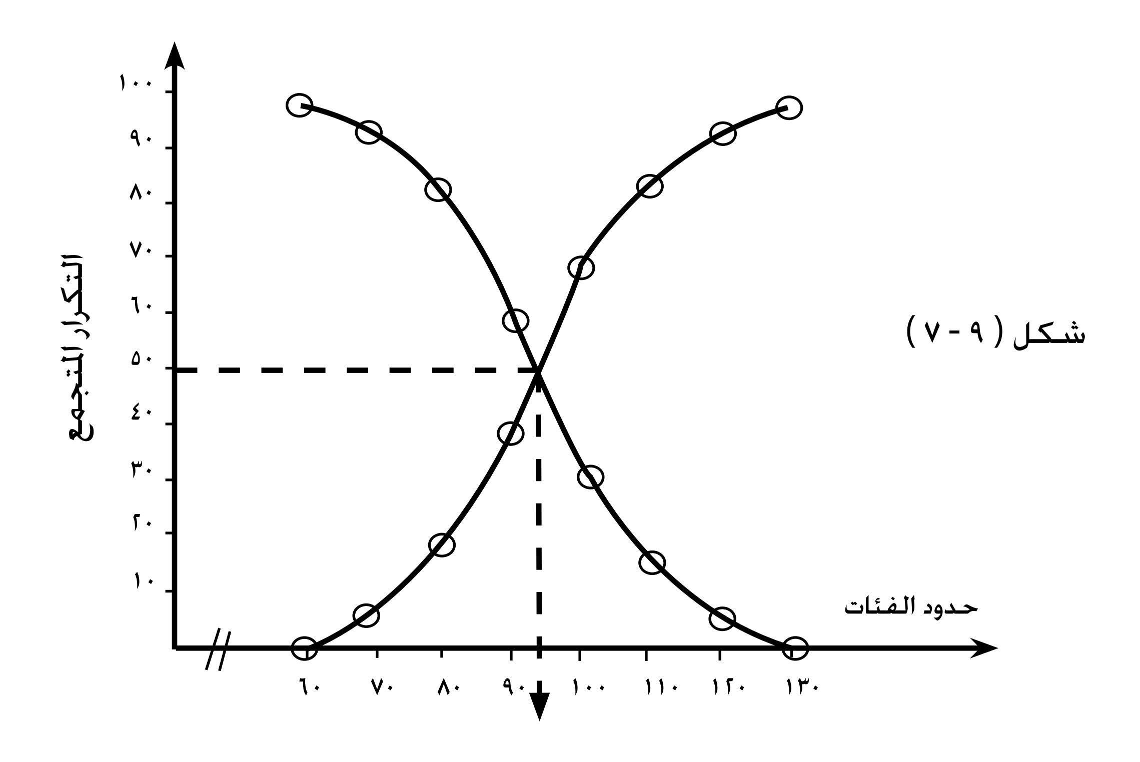
ومن الرسم يمكن استنتاج بعض النتائج . فمثلاً، لمعرفة عدد الأيام التي سقط فيها ١١٦ ملم٣ من الأمطار فأكثر، نقيم عموداً على المحور الأفقي من النقطة ١١٦ليقابل المنحنى في أ . ونرسم من أ مستقيما يوازي المحور الأفقي ويقطع المحور الرأسي في ، فتكون هي عدد الأيام المطلوبة .

وكذلك إذا أردنا معرفة الحد الأدنى لكمية الأمطار التي سقطت في ٥٠ يوماَ ، فإننا نرسم مستقيماً من النقطة ٥٠ على المحورالرأسي موازياً للمحور الأفقي، فيلاقي المنحنى عند النقطة حـ ، فنسقط عموداً على المحور الأفقي يقابله في ى، فتكون هي الحد الأدنى لكمية الأمطار .

ويمكن رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل معاً في شكل واحد، وذلك بأن نخصص المحور الأفقي لحدود الفئات العليا والدنيا و المحورالرأسي للتكرار المتجمع الصاعد والنازل، ثم نعين النقط الخاصة بكل منحنى على الرسم، ونصل بينها فنحصل على المنحنيين معاً في رسم واحد ، كما في الشكل (٩ – ٧) .

المنحنى المتجمع الصاعد والنازل لكمية

الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم .



شكل (٩ - ٧)

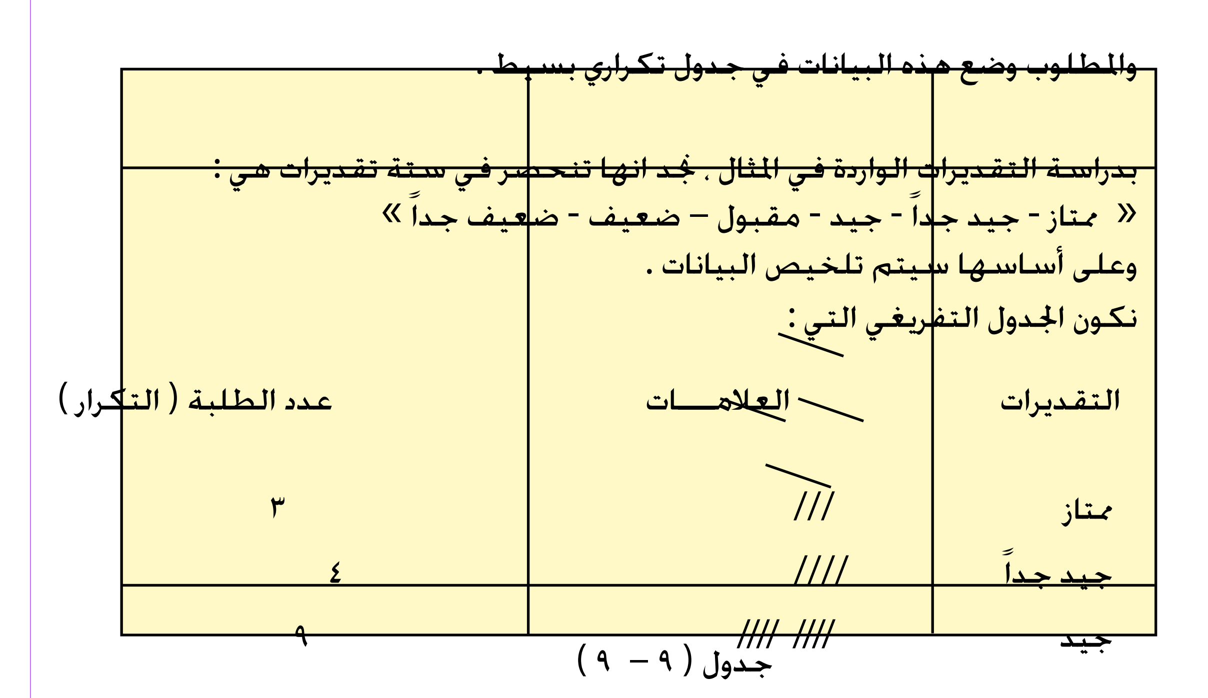
ونلاحظ ان المنحنيين يتقابلان معاً في نقطة إحداثيها على المحورالرأسي يساوي نصف مجموع التكرارات، و إحداثيها على المحور الأفقي يسمى الوسيط، وهو احد مقاييس المتوسطات التي سنتعرض لها بالتفصيل في الفصل التالي .

مثال (٩ – ٣)

البيانات التالية توضح التقديرات التي حصل عليها أربعون طالباً في مادة الاجتماع .

جيـــد ضعيف جداً جيد جداً مقبـــول
جيـــد
ضعيـف مقبـول ممتـاز جيـد ضعيف
جداً
مقبول جيـد مقبـول جيد جداً
مقبـول
ضعيف مقبـول ضعيـف مقبـول مقبـول
مقبول جيد جداً مقبول مقبول
جيـد
ممتاز مقبـول ضعيـف ضعيف جداً جيـد
مقبول ضعيـف جيـد جيد جداً
مقبـول
ضعيف جيـد ممتـاز جيـد
ضعيـف

والمطلوب وضع هذه البيانات في جدول تكراري بسيط .



بدراسة التقديرات الواردة في المثال ، نجد انها تنحصر في ستة تقديرات هي :
« ممتاز - جيد جداً - جيد - مقبول – ضعيف - ضعيف جداً »
وعلى أساسها سيتم تلخيص البيانات .
نكون الجدول التفريغي التي :

التقديرات	العلامات	عدد الطلبة (التكرار)
ممتاز	///	٣
جيد جداً	////	٤
جيد	//// ////	٩

جدول (٩ – ٩)

ثم نكوّن الجدول التكراري البسيط بأخذ العمودين الأول والثالث من الجدول (٩ – ٩). كما هو موضح في الجدول (٩ – ١٠) .

توزيع الطلاب حسب التقديرات

التي حصلوا عليها في مادة الاجتماع .

التقديرات	عدد الطلبة (التكرار)
ممتاز	٣
جيد جداً	٤
جيد	٩
مقبول	١٤
ضعيف	٧
ضعيف جداً	٣
الجملة	٤٠

جدول (٩ – ١٠)

مثال (٩ – ٤)

البيانات الآتية تمثل الأجر اليومي بالريال لمئة عامل في إحدى المنشآت :

١٨	٤٤	٤٩	٤٤	٥٦	٤٢	٤٤	٣٨	٣٧	٥٠
٦٠	٢١	٣٧	٣٣	٤٠	٤٦	٢٦	٤٥	٣٣	٤٦
٢٤	٤٢	٣٨	٤٥	٥١	٢٩	٥٦	٤٩	٤٣	٥٢
٥٤	٦١	٤٩	٦٣	٦٤	٥٩	٤٧	٢٨	٣٨	٥٣
٣٠	٤٣	٤٢	٢٧	٢٨	٣٥	٣١	٥٧	٥١	٣٤
٣٦	٣٣	٤٤	٤٥	٥٨	٤١	٢٦	٣٢	٥٠	٣٩
٣٩	٥٥	٢٢	٥٧	٣٤	٣٩	٤٨	٤٣	٥٧	٤٥
٤٨	٤٣	٦٢	٤٦	٤٠	٥٣	٥٦	٣٧	٣٣	٥٣
٥٠	٣١	٤٤	٢٣	٥٢	٤٧	٣١	٥٨	٣٨	٥٨
٤٢	٤٤	٢٦	٤٩	٦٥	٤١	٣٨	٤٧	٣٧	٥٢

جدول (٩ – ١١)

والمطلوب :

(١) تكوين جدول التوزيع التكراري للعمال حسب فئات الأجر اليومي.

(٢) تمثيل هذه البيانات بيانياً بمدرج تكراري ، ثم بمضلع تكراري ، ثم بمنحنى تكراري.

(٣) ارسمي المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع ، ومنه أوجدي :

(أ) عدد العمال الذين يحصلون على اقل من ٤٤ ريالاً .

(ب) الحد الأعلى للأجر الذي يحصل عليه ٧٠ عاملاً . (الأقل أجراً)

(٤) ارسمي المنحني المتجمع النازل ومنه أوجدي :

(أ) عدد العمال الذين يحصلون على ٣٣ ريالاً فأكثر ، ثم أوجدي نسبتهم إلى جملة العمال.

(ب) الحد الأدنى للأجر الذي يحصل عليه ٥٠ عاملاً . (الأكثر أجراً).

الحـــــــــــــل :

(١) (أ) بإلقاء نظرة على هذه البيانات ، نجد أن أصغر قيمة هي ١٨ ، وأكبر قيمة هي ٦٥ فيكون :

مدى هذه البيانات = ٦٥ - ١٨ = ٤٧

وحيث أن هذه المفردات ١٠٠ مفردة، فالوضع المناسب لطول الفئة هو أن يكون ستة. وبذلك نحصل على ثمانى فئات يوزع عليها مفردات البحث، وتكون الفئة الأولى ١٨ – تشمل أصغر قيمة وهي ١٨ ، والفئة الأخيرة ٦٠ – تشمل أكبر قيمة وهي ٦٥ .

(ب) نكوّن الجدول التفريغي التالي :

فئات الأجر	العلامات	عدد العمال (التكرار)
١٨ -	////	٤
٢٤ -	//// ///	٨
٣٠ -	//// //// //	١٢
٣٦ -	//// //// //// //	١٧
٤٢ -	//// //// //// //// ////	٢٤
٤٨ -	//// //// //// //	١٧
٥٤ -	//// //// //	١٢
٦٠ – ٦٦	//// /	٦
الجملة		١٠٠

جدول (٩ – ١٢)

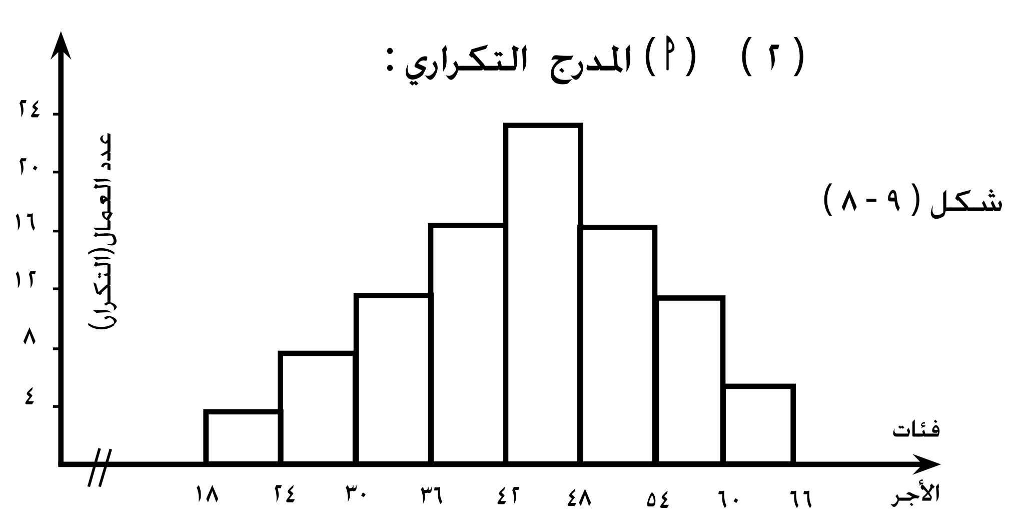
(حـ) من الجدول (٩ – ١٢) نحصل على الجدول التكراري (٩ – ١٣) .

توزيع العمال حسب فئات الأجر اليومي

فئات الأجر	عدد العمال (التكراري)
١٨ -	٤
٢٤ -	٨
٣٠ -	١٢
٣٦ -	١٧
٤٢ -	٢٤
٤٨ -	١٧
٥٤ -	١٢
٦٠ – ٦٦	٦
الجملة	١٠٠

جدول (٩ – ١٣)

(٢) (أ) المدرج التكراري :



شكل (٩ - ٨)

(ب) المضلع التكراري :

شكل (٩ - ٩)

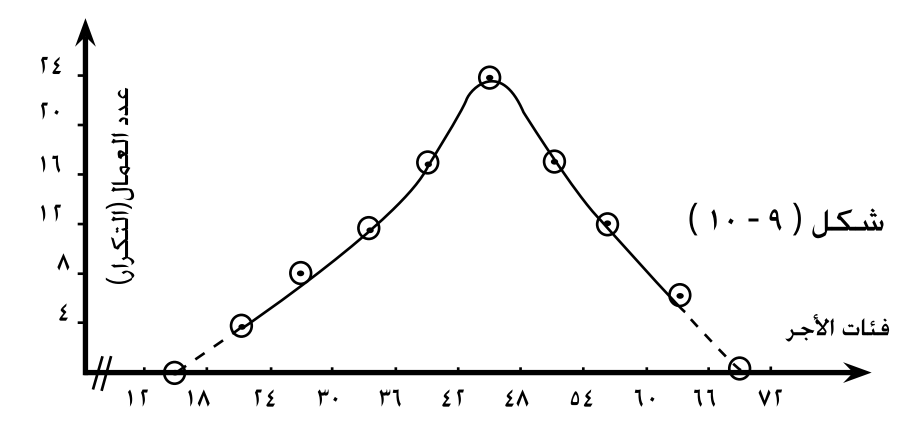
عدد العمال (التكرار)

٢٤
٢٠
١٦
١٢
٨
٤

فئات الأجر

١٢ ١٨ ٢٤ ٣٠ ٣٦ ٤٢ ٤٨ ٥٤ ٦٠ ٦٦ ٧٢

(حـ) المنحنى التكراري :



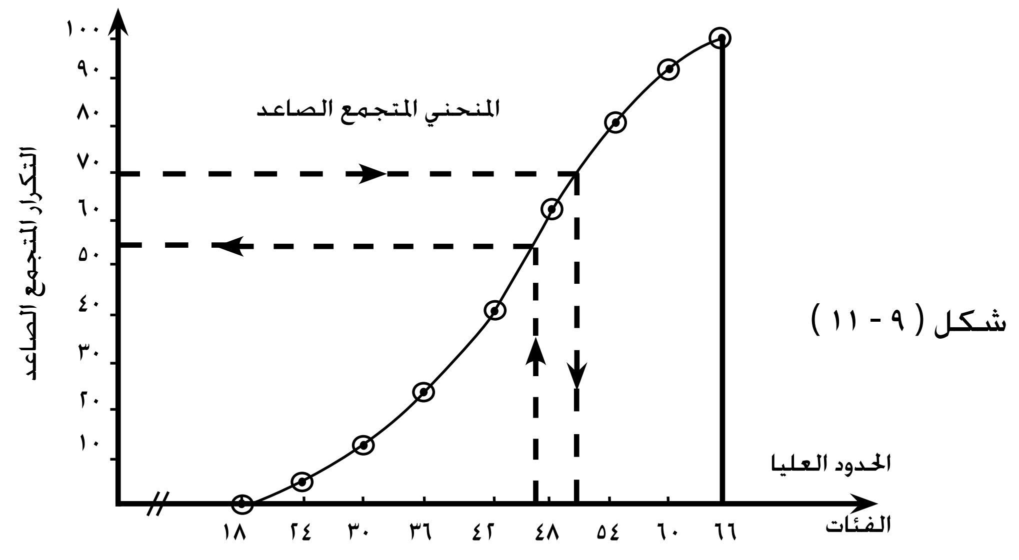
شكل (٩ - ١٠)

(٣) لرسم المنحني المتجمع الصاعد ، لابد أولاً من تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

الجدول التكراري المتجمع الصاعد
للأجر اليومي الذي حصل عليه ١٠٠ عامل .

أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤	٤
« ٣٠	١٢
« ٣٦	٢٤
« ٤٢	٤١
« ٤٨	٦٥
« ٥٤	٨٢
« ٦٠	٩٤
« ٦٦	١٠٠

جدول (٩ – ١٤)



شكل (٩ - ١١)

ومن الرسم نجد أن :

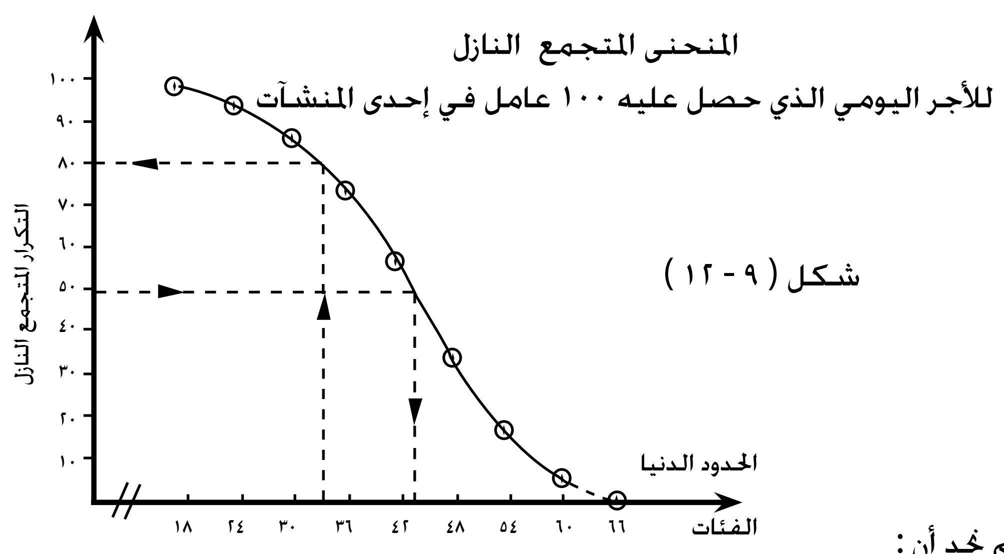
أ) عدد العمال الذين حصلوا على أجر أقل من ٤٤ ريالاً بلغ ٥٣ عاملاً .

ب) الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه ٧٠ عاملاً وصل إلى ٤٩ ريالاً .

(٤) لرسم المنحنى المتجمع النازل . نكون أولاً الجدول التكراري المتجمع النازل كما يلي في الجدول (٩ – ١٤)

الحد الأدنى لفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
١٨ فأكثر	١٠٠
٢٤ «	٩٦
٣٠ «	٨٨
٣٦ «	٧٦
٤٢ «	٥٩
٤٨ «	٣٥
٥٤ «	١٨
٦٠ «	٦

جدول (٩ – ١٥)



شكل (٩ - ١٢)

من الرسم نجد أن :

(أ) عدد العمال الذين حصلوا على ٣٣ ريالاً فأكثر بلغ ٨٠ عاملا

ونسبتهم إلى جملة العمال = $\frac{٨٠}{١٠٠} \times ١٠٠ = ٨٠٪$.

(ب) الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه ٥٠ عاملاً = ٤٤ ريالاً.

تمارين (٩-١)

(١) أخذت عينة من ٣٠ شخصاً ، وتم جمع بيانات عن حالتهم العملية فكانت :

مستخدم	صاحب عمل	يعمل لدى أسرة
صاحب عمل	يعمل لدى	صاحب عمل
متعطل	أسرة	يعمل لحسابه
صاحب عمل	مستخدم	يعمل لحسابه
يعمل لدى أسرة	يعمل لحسابه	يعمل لدى أسرة
يعمل لحسابه	صاحب عمل	متعطل
صاحب عمل	صاحب عمل	يعمل لدى أسرة
يعمل لدى أسرة	متعطل	يعمل لحسابه
يعمل لحسابه	صاحب عمل	مستخدم
متعطل	صاحب عمل	صاحب عمل

والمطلوب وضع هذه البيانات في جدول تكراري بسيط وفقاً للحالة العملية

.

٨٠	٧٥	٦٢	٦٩	٥١	٦١	٧٢	٨٣	٧٧	٧٦
٦١	٦٢	٦٤	٧٣	٧٣	٦٨	٨٦	٨٤	٨٢	٦٧
٥٥	٧٠	٧٩	٧٨	٦٦	٨٩	٦٣	٦٥	٧٥	٧٤
٧١	٧٦	٦٦	٧٣	٥٧	٦٥	٦٥	٧١	٦٤	٦١
٧٦	٧٧	٦٨	٨٥	٦٨	٦٨	٦٦	٥٩	٧٨	٥٧
٦٦	٧٠	٧٢	٧٢	٨٢	٦٣	٦٨	٨٦	٦٠	٦٩
٦٩	٨٤	٧٤	٦٤	٦٣	٦٩	٦٧	٦٥	٦٧	٦٠
٧٤	٦٢	٧٠	٧٩	٧٢	٧١	٥٦	٦٧	٥٧	٨١

والمطلوب :

(أ) تصنيف هذه البيانات في جدول تكراري بسيط .

(ب) ارسمي كلاً من المدرج والمضلع التكراري للتوزيع السابق .

(حـ) ارسمي المنحنى المتجمع الصاعد، ومنه أوجدي عدد الطلبة الذين

يقل

وزن كل منهم عن ٦٢ كجم.

(ى) ارسمي المنحنى المتجمع النازل ، ومنه أوجدي عدد الطلبة الذين

بلغ

درجات الحرارة	٨ —	١٢—	١٦—	٢٠—	٢٤—	٢٨—	٣٢—	٣٦—٤٠	
عدد الأيام	٦	١٢	٢٠	٣٠	٢٤	١٦	٨	٤	

والمطلوب :

(أ) ارسمي المدرج والمنحنى التكراري للتوزيع.

(ب) ارسمي المنحنى المتجمع النازل ومنه أوجدي :

(١) عدد الأيام التي تقل فيها الحرارة عن ١٨ درجة مئوية.

(٢) عدد الأيام التي تزيد فيها الحرارة عن ٣٠ درجة مئوية.

(٤) الجدول الآتى يوضح توزيع أطوال مجموعة من طلبة جامعة ما .

الطول بالسم	١٥٠-	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-	١٨٠-	١٨٥—١٩٠	الجملة
عدد الطلاب	٤	١٢	١٨	٢٤	٣٠	١٠	٨	٤	١١٠

والمطلوب :

(أ) ارسمي المضلع التكراري للتوزيع .

(ب) ارسمي المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع ، ومنه أوجدي عدد الطلبة الذين تقل أطوالهم عن ١٦٢ سم، وكذلك الحد الأعلى للطول الذي بلغه ٨٠ طالباً.

(٥) الجدول الآتى يبين توزيع كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ٩٠ يوماً

كمية الأمطار	٣٠ —	٤٠ —	٥٠ —	٦٠ —	٧٠ —	٨٠ —	٩٠ — ١٠٠	الجملة
عدد الأيام	٤	١١	٢٠	٢٦	١٧	٨	٤	٩٠

والمطلوب :

(أ) تمثيل هذه البيانات باستخدام المدرج التكراري، والمضلع التكراري، والمنحنى التكراري .

(ب) ارسمي المنحنى المتجمع الصاعد، ومنه أوجدي عدد الأيام التى تقل فيها كمية الأمطار عن ٦٥ مليمتراً مكعباً، وكذلك الحد الأعلى لكمية الأمطار التي سقطت خلال ٢٥ يوماً.

(جـ) ارسمي المنحنى المتجمع النازل ، ومنه أوجدي عدد الأيام التى بلغت فيها كمية الأمطار التي سقطت ٧٠ مليمتراً مكعباً فأكثر، وكذلك الحد الأدنى لكمية الأمطار التي سقطت خلال ٦٠ يوماً.

(٦) الجدول الآتى يبين دخل ٨٠ أسرة بمدينة ما بمئات الريالات :

فئات الدخل	١٦–	٢٢ –	٢٨ –	٣٤ –	٤٠ –	٤٦ –	٥٢ – ٥٨	
عدد الأسر	٤	١٠	١٦	٢٤	١٤	٨	٤	

والمطلوب إيجاد :

(أ) عدد الأسر التى تحصل على دخل أقل من ٥٠٠٠ ريال .

(ب) الحد الأعلى للدخل الذي حصلت عليه ٢٠ أسرة .

(حـ) عدد الأسر التى دخلها ١٨٠٠ ريال فأكثر .

(ء) الحد الأدنى للدخل الذي حصلت عليه ٥٥ أسرة .

٩-٥ المتوسطـــات

درسنا طرق توزيع البيانات في جداول تكرارية، وكذلك العرض البياني لها. والآن سنبحث في إيجاد مقاييس تمثل الظاهرة محل الدراسة، وتستخدم للمقارنة بينها وبين الظواهر الأخرى. فإذا لاحظنا مفردات ظاهرة معينة، نجد أن هذه المفردات تحاول أن تتجمع حول قيمة ما، بمعنى أن هناك نزعة تجعل هذه المفردات تتركز حول هذه القيمة. هذه النزعة تسمى النزعة المركزية. والقيمة التي تحاول المفردات أن تتركز حولها، تسمى متوسط الظاهرة. فإذا رجعنا إلى بيانات الجدول (٩ – ٦)، نجد أن هناك عدداً كبيراً من القراءات يتراكم أو يتمركز حول قيمة معينة في المدى الموزع فيه هذه البيانات ، ثم يتناقص هذا العدد تدريجياً عند القيم الأخرى، كلما

بعدت عن هذه القيمة. وهذا هو السلوك المعتاد لغالبية الظواهر ، ولتحديد القيمة التي تتراكم حولها معظم القراءات ، أي القيمة المتوسطة للتوزيع ، توجد عدة مقاييس أهمها :

المتوسط الحسابي ، والوسيط ، والمنوال .

ولا يمكن تفضيل أحد هذه المقاييس على الآخر ، فلكل عيوبه ومزاياه . ويلاحظ أنه إذا ذكر لفظ المتوسط فقط دون تحديد فيقصد به المتوسط الحسابي وفيما يلي عرض لهذه المتوسطات.

أولاً : المتوسط الحسابي :

تعريف (٩ – ١)

المتوسط الحسابي يساوي مجموع القراءات مقسوماً على عددها .

طرق حساب المتوسط الحسابي :

(أ) في حالة البيانات غير المبوبة ، يتم حساب متوسطها الحسابي بقسمة مجموع هذه القيم على عددها ، أى أن :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع}}{\text{القيم}}$$

فمثلا : إذا كانت أوزان مجموعة من الطلاب بالكيلو جرام هي :

٥٠ ، ٦٠ ، ٨٠ ، ٧٠ ، ١٠٠ كيلو جرام فـإن :

$$\text{المتوسط الحسابي لأوزان الطلبة} = \frac{٥٠ + ٦٠ + ٨٠ + ٧٠ + ١٠٠}{٥}$$

$$= \frac{٣٦٠}{٥}$$

فإذا كانت س ترمز للظاهرة محل الدراسة ، وكان لدينا ن قراءة من قيم هذه الظاهرة، ولتكن $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ فيكون المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) هو :

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \quad .... \quad (١)$$

حيث $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ تعبر عن مجموع قيم الظاهرة .

(ب) حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية) :

ذكرنا في البند (٩ – ٣) أنه بعد توزيع القيم الأصلية للظاهرة على الفئات في الجدول التكراري، تختفي هذه القيم وتضيع معالمها، وكل ما يمكن معرفته عن أي قيمة منها، أنها واحدة من مفردات فئة معينة في الجدول. وأوضحنا كذلك، أن القاعدة في هذه الحالة، هي اعتبار أن كل المفردات التي في فئة تكرارية واحدة متساوية، وقيمتها تساوي مركز الفئة التي تناظرها.

فإذا كانت س ترمز لمراكز الفئات ، ك هو التكرار المناظر لها فيكون :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \bar{س} = \frac{\sum س\, ك}{\sum ك} = \frac{\sum س\, ك}{ن} \quad .... \quad (٢)$$

ولحساب المتوسط الحسابي لكمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم، والمبين توزيعها بالجدول (٩ – ٦) من البند (٩ – ٣)، نتبع الخطوات التالية :

(أ) نضيف عموداً لمراكز الفئات س .

(ب) نضرب تكرار كل فئة في مركز هذه الفئة ، ونضع حاصل الضرب (س × ك) في العمود الأخير من الجدول . فنحصل على الجدول (٩ – ١٦) .

(حـ) نوجد قيمة المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة (٢) :

س̄ = (مجـ س ك) / (مجـ ك) (أي مجموع العمود الأخير على مجموع العمود الثاني)

= ٩٣٥٠ / ١٠٠

= ٩٣,٥ مليمتراً مكعب.

فئات كمية الأمطار بالملم المكعب	عدد الأيام (التكرار = ك)	مراكز الفئات (س)	س × ك
٦٠-	٥	٦٥	٣٢٥
٧٠-	١٥	٧٥	١١٢٥
٨٠-	٢٠	٨٥	١٧٠٠
٩٠-	٣٠	٩٥	٢٨٥٠
١٠٠-	١٥	١٠٥	١٥٧٥
١١٠-	١٠	١١٥	١١٥٠
١٢٠-١٣٠	٥	١٢٥	٦٢٥
المجموع ٩٣٥٠	١٠٠	ــــــ	

جدول (٩ – ١٦)

ثانياً - الوسيط :

تعريف (٩ – ٢)

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً ، أي القيمة التي يكون عدد القيم التي تصغرها مساوياً لعدد القيم التي تكبرها .

طرق حساب الوسيط :

(أ) في حالة البيانات غير المبوبة :

نرتب قيم المجموعة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ، ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماماً إذا كان عدد القيم (ن) فردياً ، أما إذا كان عدد القيم (ن) زوجياً ، فنأخذ الوسط الحسابي للقيمتين المتوسطتين ، فتكون هي قيمة الوسيط .

فمثلاً إذا كانت كمية الأمطار التي سقطت على مدينة خلال خمسة أيام هي : ٨٠ ، ٥٠ ، ٧٠ ، ١٠٠ ، ٦٠ ملم٣ ، فلإيجاد الوسيط نرتبها تصاعدياً كما يلي : ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ١٠٠ (أو تنازلياً). فتكون القيمة التي رتبتها الثالثة (وهي القيمة الوسطى) هي الوسيط. أي أن الوسيط = ٧٠ ملم٣ .

وعلى العموم فإن رتبة الوسيط لمجموعة من القيم عددها (ن). حيث ن عدد فردي ، تساوي $\frac{ن+١}{٢}$ أما إذا كان عدد القيم زوجياً، وليكن ستة مثلا، كسقوط الأمطار في ستة أيام وكمياتها بالملم٣ هي ، ٦٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٧٠ ، ١٠٠ ، ٤٠ ، فإننا نرتب

هذه القيم تصاعدياً كما يلي :

٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ١٠٠ . ويكون الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين الثالثة والرابعة ، أي أن :

$$\text{قيمة الوسيط} = \frac{٦٠ + ٧٠}{٢} = ٦٥ \text{ ملم}^{٣} .$$

وعلى وجه العموم فالوسيط لمجموعة من القيم عددها ن ، حيث ن عدد زوجي ، يساوي نصف مجموع القيمة التي رتبتها $\frac{ن}{٢}$ والقيمة التي رتبتها $\frac{ن}{٢} + ١$.

(ب) في حالة البيانات المبوبة (التوزيعات التكرارية) :

يتم حساب الوسيط في هذه الحالة بالحساب والرسم كما يلي :

(١) بالحساب : نتبع الخطوات التالية :

(١) نكّون من الجدول التكراري البسيط جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً .

(٢) نعيّن ترتيب الوسيط وهو نصف مجموع التكرارات ، أي :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{ن}{٢} .$$

(سواء كان هذا المجموع فردياً أم زوجياً) .

(٣) نعيّن الفئة الوسيطية للتوزيع . وهي تلك الفئة التي يقع فيها الوسيط

(أي التي تقع فيها القراءة ذات الترتيب $\frac{ن}{٢}$) .

(٤) تتحدد قيمة الوسيط داخل الفئة الوسيطية باستخدام العلاقة الآتية :

الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطية + س .... (٣)

حيث :

ن = طول فئة الوسيط × $\frac{\text{ترتيب الوسيط - التكرار المتجمع الصاعد قبل فئة الوسيط}}{}$

وبتطبيق الخطوات السابقة على الجدول (٩ – ٦) نجد أن :

فئات كمية الأمطار	عدد الأيام ك	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	
٦٠ -	٥	اقل من ٧٠	٥	
٧٠ -	١٥	" من ٨٠	٢٠	الفئة
٨٠ -	٢٠	" من ٩٠	٤٠	
٩٠ -	٣٠	" من ١٠٠	٧٠	
١٠٠ -	١٥	" من ١١٠	٨٥	
١١٠ -	١٠	" من ١٢٠	٩٥	
١٢٠ – ١٣٠	٥	" من ١٣٠	١٠٠	

جدول (٩ – ١٧)

ويكون :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$$

$$= \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

ومنه نجد أن الفئة الوسيطية هي (٩٠ -)

$$\text{قيمة الوسيط} = ٩٠ + ١٠ \times \frac{٥٠ - ٤٠}{٣٠}$$

$$= ٩٠ + \frac{١٠٠}{٣٠}$$

= ٩٣,٣ مليمتراً مكعب .

(٢) بالرسم :

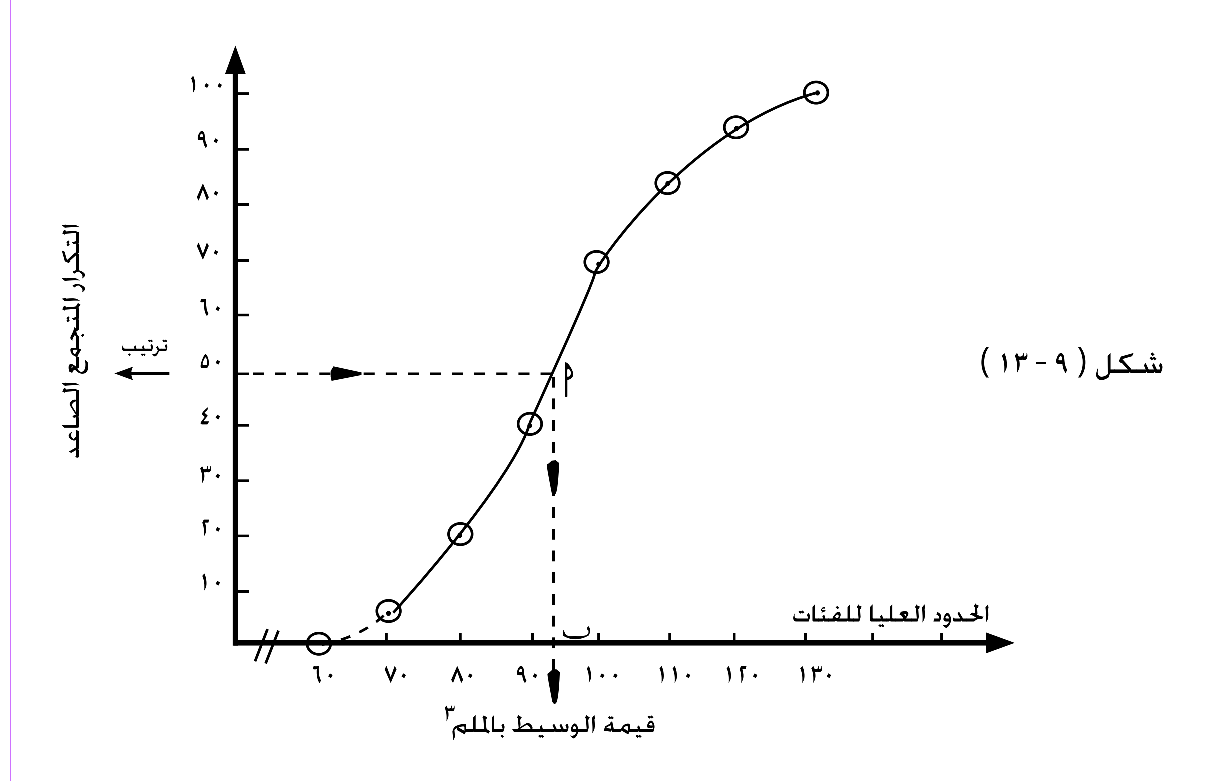
يتم إيجاد قيمة الوسيط بالرسم من المنحنى المتجمع الصاعد كما يلي :

(أ) تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد، ثم رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

(ب) نعيّن ترتيب الوسيط (نصف مجموع التكرارات) على المحور الرأسي.

(حـ) نرسم من نقطة ترتيب الوسيط مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة أ ، ونسقط منها عموداً على المحور الأفقي يقابله في نقطة ب ، فتكون هي قيمة الوسيط. وكلما كان الرسم دقيقاً، كلما حصلنا على قيمة الوسيط بدقة أكبر. والشكل


(٩ – ١٣) يوضح طريقة إيجاد الوسيط للمثال (٩ – ٢) .



شكل (٩ - ١٣)

ثالثاً - المنوال :

تعريف (٩ – ٣)

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر شيوعاً، أي القيمة التي تكررت أكثر من غيرها .

فمثلاً، إذا كانت كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ثمانية أيام هي : ٣٠ ، ٣٥، ٥٠ ، ٤٠ ، ٥٥ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، فإن المنوال لهذه القيم هو القيمة ٥٠ لأنها تتكرر أكثر من غيرها . أما في عملية البيانات المبوبة ، فالمنوال هو القيمة التي تناظر قمة المنحنى الذي يمثل التوزيع ، وذلك لأنها القيمة الأكثر تكراراً . وللحصول على أحسن منحنى، فإنا ذلك يتطلب ضرورة إيجاد معادلة هذا المنحنى ، حتى نستطيع الحصول على قيمة المنوال بالحساب أو بالرسم بطرق تقريبية نذكر منها :

(١) طريقة الرافعة :

وتقوم هذه الطريقة على أساس ان المنوال طالما هو القيمة الأكثر تكراراً ، فهو يقع في الفئة ذات التكرار الأكبر وهذه الفئة تعرف باسم « الفئة المنوالية » ولتحديد موقع المنوال داخل هذه الفئة المنوالية ، نفرض أنه ينحرف عن بدايتها داخل الفئة المنوالية بمسافة تساوي س . فيمكن إيجاد قيمة المنوال من العلاقة الآتية :

قيمة المنوال = قيمة بداية الفئة المنوالية + س ..... (٤)

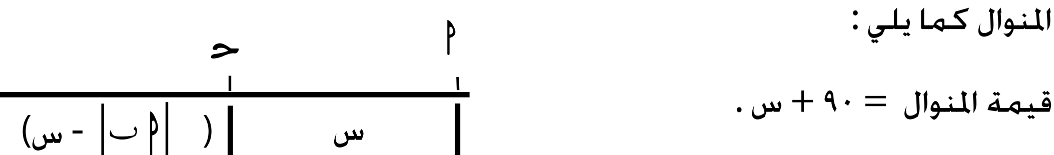
حيث س تحسب من العلاقة الآتية :

الفرق بين التكرار اللاحق للفئة المنوالية و تكرار الفئة المنوالية × س = الفرق بين التكرار السابق للفئة المنوالية وتكرار الفئة المنوالية × (طول الفئة المنوالية – س)

... (٥)

فإذا كانت بداية الفئة المنوالية هى النقطة أ ونهايتها ب ، والفرق بين التكرار السابق للفئة المنوالية وتكرار الفئة المنوالية هو $ى_٢$ والفرق بين التكرار اللاحق لها وتكرار الفئة المنوالية هو $ى_١$ وافترضنا أن حـ هو موضع المنوال ، فإن :

وبالرجوع إلى المثال (٩ – ٢) ، نجد أن الفئة المنوالية هي الفئة (٩٠ -) ، و تكرار الفئة السابقة لها ٢٠ ، و تكرار الفئة اللاحقة لها ١٥ ، وطول الفئة ١٠ ، فيمكن حساب المنوال كما يلي :



قيمة المنوال = ٩٠ + س .

ولحساب قيمة س فإن :

١٥ × س = ١٠ (١٠ – س)

أي أن :

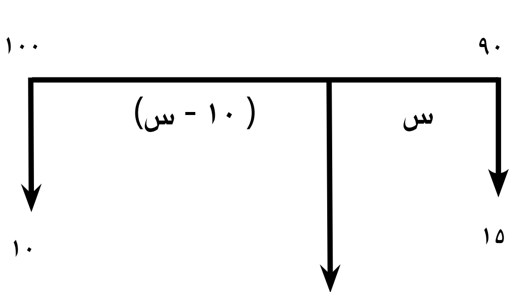
٢٥ س = ١٠٠

إذاً س = ٤

ويكون :

قيمة المنوال = ٩٠ + ٤

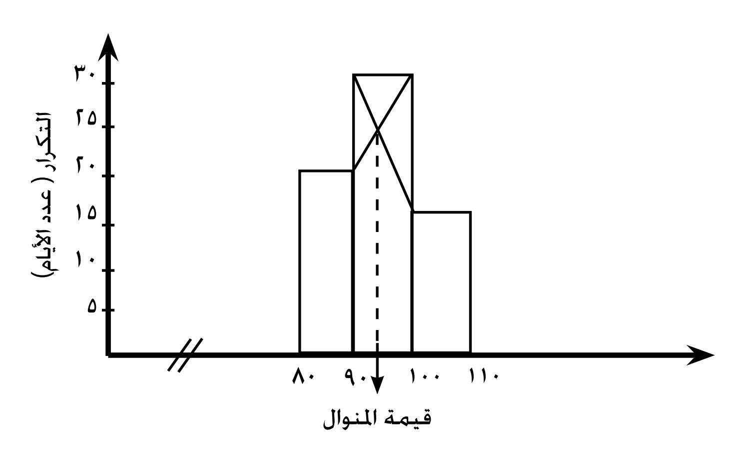
= ٩٤ ملم^{٣} .



ب) حساب قيمة المنوال بالرسم :

يتم حساب قيمة المنوال بالرسم من المدرج التكراري، وإن كان يكتفى برسم المستطيلات التي تمثل الفئة المنوالية الفئة السابقة واللاحقة لها. ثم نصل الرأس الأيمن العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بالرأس الأيمن العلوي للمستطيل، الذي يمثل الفئة السابقة للفئة المنوالية. وكذلك نصل الرأس الأيسر العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بالرأس الأيسر العلوي للمستطيل الذي يمثل الفئة

عموداً على المحور الأفقي يقابله في نقطة ، تكون هي قيمة المنوال ، كما يتضح من الشكل (٩ – ١٤) الذي يوضح طريقة إيجاد المنوال للمثال (٩ – ٢) .



شكل (٩ - ١٤)

من الرسم نجد أن :

قيمة المنوال = ٩٤ ملم^{٣} .

مثال (٩ – ٥)

الجدول الآتي يبين توزيع مجموعة من الطلبة ، حسب فئات الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان إحدى المواد .

فئات الدرجات	١٢ -	١٦ -	٢٠ -	٢٤ -	٢٨-	٣٢ -	٣٦ – ٤٠	الجملة
عدد الطلبة	٥	٨	١٢	١٨	١٠	٧		٤

والمطلوب :

(١) حساب قيمة المتوسط الحسابي للدرجات التي حصل عليها الطلبة .

(٢) حساب قيمة الوسيط بالحساب وبالرسم .

(٣) حساب قيمة المنوال بالحساب وبالرسم .

الحـــــل :

حساب قيمة المتوسط الحسابي :

فئات الدرجات ف	عدد الطلبة التكرار ك	مركز الفئة (س)	ك × س
١٢ -	٥	١٤	٧٠
١٦ -	٨	١٨	١٤٤
٢٠ -	١٢	٢٢	٢٦٤
٢٤ -	١٨	٢٦	٤٦٨
٢٨ -	١٠	٣٠	٣٠٠
٣٢ -	٧	٣٤	٢٣٨
٣٦ – ٤٠	٤	٣٨	١٥٢
المجموع	٦٤	-	١٦٣٦

جدول (٩ – ١٨)

$$\text{المتوسط الحسابي } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{١٦٣٦}{٦٤} = ٢٥,٥٦ \text{ درجة .}$$

(٢) حساب قيمة الوسيط .

(أ) بالحساب : نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد الآتي :

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

لدرجات مجموعة من الطلبة في امتحان إحدى المواد

فئات الدرجات	عدد الطلبة (التكرار)	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٢ -	٥	اقل من ١٦	٥
١٦ -	٨	» من ٢٠	١٣
٢٠ -	١٢	» من ٢٤	٢٥
٢٤ -	١٨	» من ٢٨	٤٣ (الفئة الوسيطية)
٢٨ -	١٠	» من ٣٢	٥٣
٣٢ -	٧	» من ٣٦	٦٠
٣٦ - ٤٠	٤	» من ٤٠	٦٤
المجموع	٦٤		

جدول (٩ – ١٩)

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$$

$$= \frac{٦٤}{٢} = ٣٢$$

ومنه نجد أن الفئة الوسيطية هي الفئة (٢٤ -)

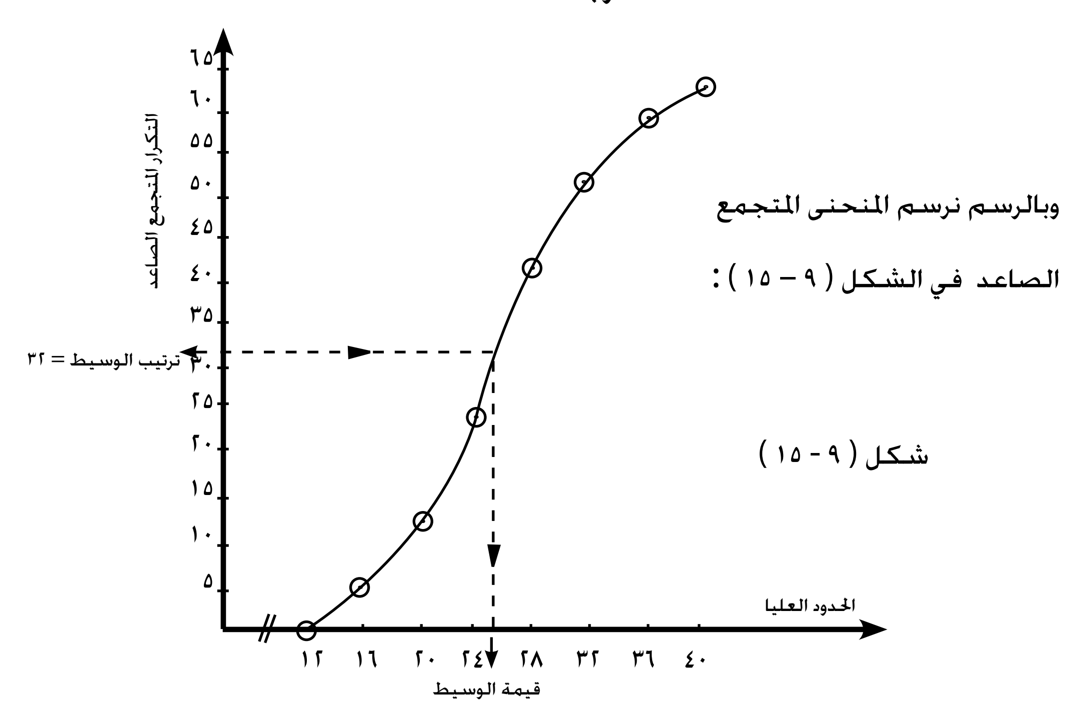
$$\text{قيمة الوسيط} = ٢٤ + ٤ \times \frac{٣٢ - ٢٥}{١٨}$$

$$= ٢٤ + ٤ \times \frac{٧}{١٨}$$

$$= ٢٤ + ١,٥٥$$

$$= ٢٥,٥٥ \text{ درجة .}$$

وبالرسم نرسم المنحنى المتجمع الصاعد في الشكل (٩ – ١٥) :



شكل (٩ - ١٥)

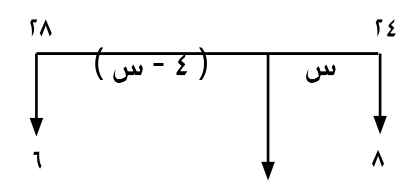
من الرسم نجد أن قيمة الوسيط = ٢٥,٥ درجة

(٣) حساب قيمة المنوال :

(أ) بالحساب : قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

حيث أن الفئة التي لها أكبر تكرار هي (٢٤ -) ، فيمكن حساب قيمة س

كالآتي :



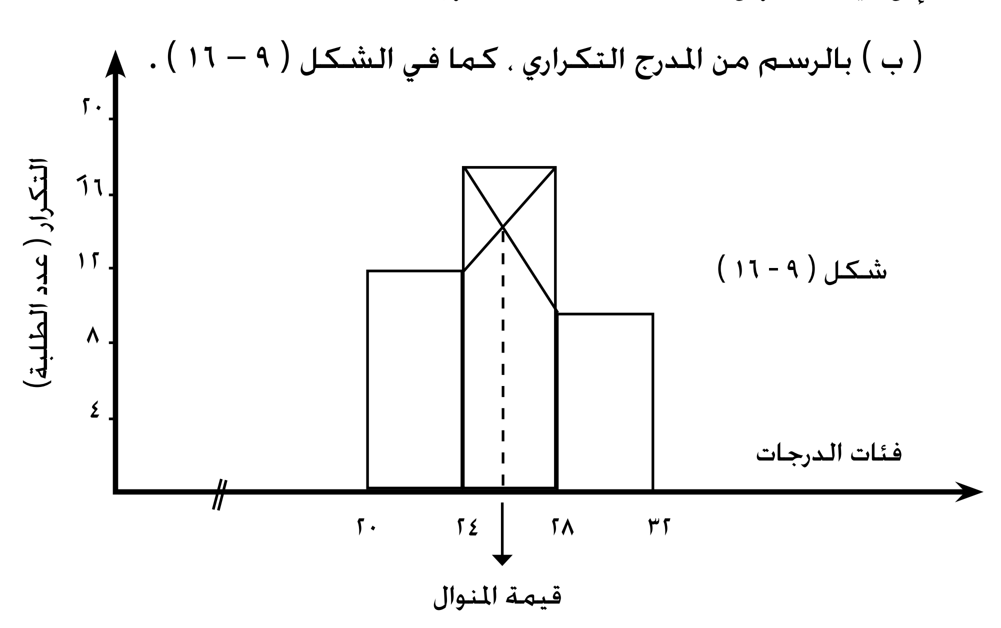
٨ × س = ٦ (٤ – س)

إذاً ١٤ س = ٢٤

إذن س = $\frac{٢٤}{١٤}$ = ١,٧

إذن قيمة المنوال = ٢٤ + ١,٧ = ٢٥,٧ درجة

(ب) بالرسم من المدرج التكراري ، كما في الشكل (٩ – ١٦) .



شكل (٩ - ١٦)

الخلاصة

(١) الجدول التكراري يوضح توزيع مفردات اي ظاهرة على فئاتها.

(٢) المدرج التكراري تحدده مستطيلات قاعدة كل منها طول الفئة وارتفاعه التكرار المناظر لهذة الفئة.

(٣) المضلع التكراري هو مضلع مغلق يحدده المحور الافقي وقطع المستقيمات التي تصل بين النقط (س ، ص) ، حيث س مركز الفئة ، ص التكرار المناظر لها .

(٤) المنحنى التكراري هو منحنى مغلق يمر بالنقط (س ، ص) ، حيث س مركز الفئة ، ص التكرار المناظر لها .

(٥) المنحنى المتجمع النازل هو منحنى تحدده النقط (س ، ص) حيث س هو الحد الأدنى للفئة. ص هو التكرار المتجمع النازل المناظر لها

.

(٦) المنحنى المتجمع الصاعد هو منحنى تحدده النقط (س ، ص) ، حيث س هو الحد الأعلى للفئة. ص هو التكرار المتجمع الصاعد المناظر لها.

(٧) المتوسط الحسابي س لمجموعة من القراءات عددها ن

$$\bar{س} = \frac{\Sigma\, س}{ن}$$ ، حيث س ترمز للقراءات.

وإذا كانت مصنفة في جدول تكراري فإن :

(٨) الوسيط هو القراءة التي تقع في وسط المجموعة بعد ترتيبها تنازلياً أو

تصاعدياً فإذا كان عدد القراءات ن عدداً فردياً ، فإن رتبة الوسيط $\frac{ن+١}{٢}$.

وإذا كانت ن زوجية ، فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقراءتين ذات

الترتيبين $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}+١$. وفي حالة البيانات المصنفة في جدول تكراري فإن :

الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطية + س ، حيث :

س = طول الفئة × $\frac{ن}{٢}$ − التكرار المتجمع الصاعد قبل الفئة الوسيطية

(٩) المنوال هو القراءة التي تتكرر أكثر من غيرها . وفي حالة البيانات المصنفة

في جدول تكراري فإن :

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س ، حيث :

س × الفرق بين التكرار اللاحق للفئة المنوالية و تكرار الفئة المنوالية

= (طول الفئة − س) × الفرق بين التكرار السابق للفئة المنوالية

كمية الأمطار بالملم^{٣}	١٨ -	٢٨ -	٣٨ -	٤٨ -	٥٨ – ٦٨
عدد الأيام	٢٦	٥٩	١٠٥	٧٩	٣١

والمطلوب :

(١) حساب قيمة المتوسط الحسابي لكمية الأمطار .

(٢) حساب قيمة الوسيط بالحساب وبالرسم .

(٣) حساب قيمة المنوال بالحساب وبالرسم .

(٢) الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من الأسر حسب الإنفاق الشهري بالجنيهات :

فئات الانفاق	٥ -	٢٥ -	٤٥-	٦٥-	٨٥-	١٠٥ -	١٢٥-	١٤٥ -	الجملة
عدد الآسر	٤	٦	١٥	٢٢	١٣	٧	٥	٣	٧٥

والمطلوب :

(أ) حساب قيمة المتوسط الحسابي للإنفاق الشهري .

(ب) حساب قيمة الوسيط بالحساب وبالرسم .

(ح) حساب قيمة المنوال بالحساب وبالرسم .

(٣) الجدول التالي يوضح توزيع درجات الحرارة في مدينة خلال ١٠٠ يوم

فئات درجات الحرارة	٢٠-	٢٥-	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -	٥٥ -	٦٠ – ٦٥
عدد الأيام	٣	٩	١٣	١٦	٢٠	١٥	١٣	٨	٣

والمطلوب :

(أ) حساب قيمة المتوسط الحسابي لدرجات الحرارة .

(ب) ارسمي المنحنى المتجمع الصاعد ، ومنه أوجدي قيمة الوسيط .

(حـ) ارسمي المدرج التكراري ، ومنه أوجدي قيمة المنوال للتوزيع .

(٤) فيما يلى التوزيع التكراري لسكان مدينة أعمارهم دون سن الستين حسب اعمارهم :

فئات السن بالسنة	٢٠-	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -	٥٥ – ٦٠
عدد السكان بالآلاف	٢٢	٢٥	٢٠	١٨	٣٥	٢٥	١٥	١٠

والمطلوب :

(أ) حساب قيمة المتوسط الحسابي للاعمار .

(ب) حساب قيمة الوسيط بالحساب وبالرسم .

(حـ) حساب قيمة المنوال بالحساب وبالرسم .

(٥) الجدول الآتي يوضح توزيع قوة العمل في إحدى المدن حسب السن :

فئات السن	٦-	١٢-	١٨-	٢٤-	٣٠-	٣٦-	٤٢-	٤٨-	٥٤-٦٠	الجملة
قوة العمل بالمئات	١٨	٦٢	٦٠	١٧٦	٢٣٥	١٨٧	١٥٧	٨٧	١٨	١٠٠٠

والمطـــلوب حســاب قيمة المتوســـط الحسابى س لفئات قوة العــمل وكذلك قيمة الوســـيــط و المنوال لهذا التــوزيع .

٩-٦ مقدمة مبادئ الاحتمالات

تلعب الاحتمالات دوراً خاصاً في حياتنا اليومية ، لأننا نستخدمها في قياس عدم التأكد. فكثيراً ما نقابل عملية اتخاذ القرارات بناء على معلومات غير كاملة ، فنعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار . فمثلاً ، قد نلغي حفلة خارجية رتبنا لها ، وذلك لأن احتمال أن يكون الجو رديئا احتمال كبير. وكثيراً ما نتحدث عن احتمال ارتفاع درجة الحرارة في اليوم التالي واحتمال سقوط الأمطار في اليوم التالي، واحيانا نجد أننا نعبر عن هذه الاحتمالات بتقدير عددي ، كأن نقول إن احتمال سقوط الأمطار غداً ٢٠ ٪ واحتمال نجاح التلميذة سعاد ٩٠ ٪ وهكذا .

وهذه التقديرات العددية للاحتمالات لا تستند إلى أساس رياضي ، ولكن قد نعتمد على أحداث وخبرات سابقة عن الطقس ، وعن تتبع الحالة التعليمية للتلميذة سعاد وهكذا .

ولنظرية الاحتمــالات تطبيقــات كثيــرة وهامــة فــي مجــال التخطيــط للتنميــة الاجتماعيــة والاقتصادية والتصنيع والبحــث العلمي. كما ان لها أهمية خاصــة فــي اتخــاذ القــرارات فــي كثيــر مــن ميادين العمــل اليومــي

ويرجع ظهور مفهوم الاحتمالات في الفترة من ١٦٢٣ حتى ١٦٦٢ م إلى العالم الفرنسي باســكال . ثم نشــر العالم السويســري برنولي عام ١٧١٣ م كتابه الأول عن الاحتمالات

باستخدام مفهومها الذي يعتمد على الخبرة . وفي عام ١٨١٣ نشر لابلاس كتاباً في نظرية الاحتمالات ، أعطى به دفعة قوية لهذه النظرية .

٩-٧ التجربة العشوائية – فراغ العينة – الحادثة

الاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج **التجارب أو المحاولات العشوائية**. والتجربة هي أي إجراء يمكن وصفه وصفاً دقيقاً وملاحظة ماينتج عنه وتسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كنا نعلم مسبقاً جميع نواتجها الممكنة ، ولكننا لا نستطيع أن نتنبأ على وجه الدقة أي هذه النواتج سيتحقق فعلاً . فمثلاً ، إذاً ألقيت قطعة من النقود، فإننا لا نستطيع أن نتنبأ إذا كان السطح العلوي لها سيكون صورة أو كتابة. إذاً إلقاء قطعة النقود تجربة عشوائية. كذلك، إذا كانت هناك حالة ولادة، فلا نستطيع التنبؤ عما إذا كان المولود ذكراً أو أنثى ، وعليه فحالة الولادة تجربة عشوائية .

تعريف (٩ - ٤)

التجربة العشوائية هي كل إجراء نعلم مسبقاً جميع النواتج الممكنة له، وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ بالضبط أي هذه النواتج سيتحقق فعلاً .

يلاحظ في تجربة إلقاء قطعة النقود مرة واحدة ، أن جميع النتائج الممكنة لها هي صورة أو كتابة. فإذا رمزنا للصورة بالرمز ص، وللكتابة بالرمز ك، فإن مجموعة النواتج لهذه

أما في حالة الولادة فإن مجموعة النتائج الممكنة هي :

ش = { ولد ، بنت }

مثال (٩ – ٦)

إذا ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين،فإن مجموعة النواتج الممكنة لهذه

التجربة

هي :

ش = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

وكل زوج مرتب من هذه المجموعة يمثل أحد نواتج هذه التجربة. فمثلاً

الزوج (ص ، ص) يمثل ظهور صورة على الوجه الأعلى في كل إلقاء.

تسمى مجموعة النواتج الممكنة للتجربة العشوائية فراغ العينة .

تعريف (٩ – ٥)

فراغ العينة لتجربة ماهو جميع النواتج الممكنة لهذه التجربة .

مثال (٩ – ٧)

إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة . فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو :

ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

وكل عنصر من هذه المجموعة يمثل أحد النواتج الممكنة لتجربة إلقاء حجر النرد .

مثال (٩ – ٨)

إذا ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، فإن فراغ العينة ش هو مجموعة الأزواج المرتبة الآتية :

		الحجر الثاني					
		١	٢	٣	٤	٥	٦
الحجر الأول	١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
	٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
	٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
	٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
	٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
	٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

وكل زوج مرتب من هذه المجموعة يمثل أحد نواتج هذه التجربة. فمثلا ، العنصر (٣ ، ٤) يمثل ظهور العدد ٣ على الحجر الاول ، والعدد ٤ على الحجر الثاني .

تلاحظ الطالبة أن التجربة العشوائية لا تتحدد تماماً إلا بتحديد فراغ العينة المرتبط بها، وفراغ العينة قد يكون منتهياً، وقد يكون غير منتهي. وجميع الأمثلة السابقة تمثل فراغ عينة منتهياً، وسوف نقصر معالجتنا للاحتمالات فى إطار فراغ العينة المنتهي .

أحياناً يكون اهتمامنا منصباً على بعض نتائج التجربة العشوائية. وفي هذه الحالة، سوف ينصب اهتمامنا على العناصر المناظرة لهذه النتائج. وهذه العناصر تكون مجموعة جزئية من فراغ العينة. وكل مجموعة جزئية من فراغ العينة تسمى حادثة .

تعريف (٩ – ٦)

الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فراغ العينة. وإذا كانت هذه المجموعة الجزئية تحتوي على عنصر واحد فقط ، فإنها تسمى حادثة بسيطة.

مثال (٩ – ٩)

بالرجوع إلى المثال (٩ – ٦) ، نجد أن فراغ العينة المتعلق بتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين هو :

ش = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

نأخذ المجموعات الجزئية التالية ونعبر عنها لفظياً :

$أ_١$ = { (ص ، ص) } حادثة بسيطة تمثل ظهور صورتين متتاليتين .

$أ_٢$ = { (ص ، ص) ، (ك ، ك) } حادثة ظهور وجهين متشابهين لأعلى .

$أ_٣$ = { (ص ، ص) ، (ك ، ص) ، (ص ، ك) } حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل .

Φ الحادثة المستحيلة ، لأنها تمثل الحالة التي لا يكون للتجربة فيها نواتج ، كأن نقول مثلا ، حادثة ظهور ثلاث صور .

ش الحادثة المؤكدة ، لأنه من المؤكد أن يظهر وجهان إلى أعلى .

مثال (٩ – ١٠)

بالرجوع إلى المثال (٩ – ٧) نجد أن :

ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } . إن كلاً من المجموعات الجزئية

التالية تمثل حادثة :

$أ_١$ = { ٣ } حادثة بسيطة تمثل ظهور العدد ٣ إلى أعلى .

$أ_٢$ = { ٢ ، ٤، ٦ } حادثة ظهور عدد زوجي .

$أ_٣$ = { ١ ، ٣ ، ٥ } حادثة ظهور عدد فردي .

$أ_٤$ = { ٥ ، ٦ } حادثة ظهورعدد أكبر من ٤ .

ش حادثة مؤكدة . وهي حادثة ظهور عدد على الوجه العلوي .

ϕ حادثة مستحيلة . كأن نقول مثلاً حادثة ظهورالعدد ٧ .

ملاحظة (٩ – ١)

نقول إن الحادثة قد وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة .

مثال (٩ – ١١)

في مثال (٩ – ٨) اكتبي كلاً من الحوادث الآتية :

$أ_١$: أن يكون مجموع النقط على وجهي الحجرين ٨ .

$أ_٢$: أن تتساوى النقط على كل من الوجهين الظاهرين .

$أ_٣$: أن يكون العدد على الحجر الأول زوجياً وعلى الثاني ٥ .

الحـــــــل :

$أ_1$ = { (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٢) }

$أ_2$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

$أ_3$ = { (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٦ ، ٥) }

مثال (٩ – ١٢)

قام عبد الرحمن برحلة من الظهران إلى جدة على ثلاث مراحل ، الظهران - الرياض ، الرياض – المدينة ، المدينة – جدة . فإذا كانت وسيلة المواصلات في كل مرحلة إما طائرة أو سيارة ، اكتبي فراغ العينة لهذه الرحلة ، وكذلك كل حادثة من الحوادث التالية :

$أ_1$: يركب عبد الرحمن الطائرة في جميع مراحل الرحلة .

$أ_2$: يركب السيارة في رحلة واحدة فقط .

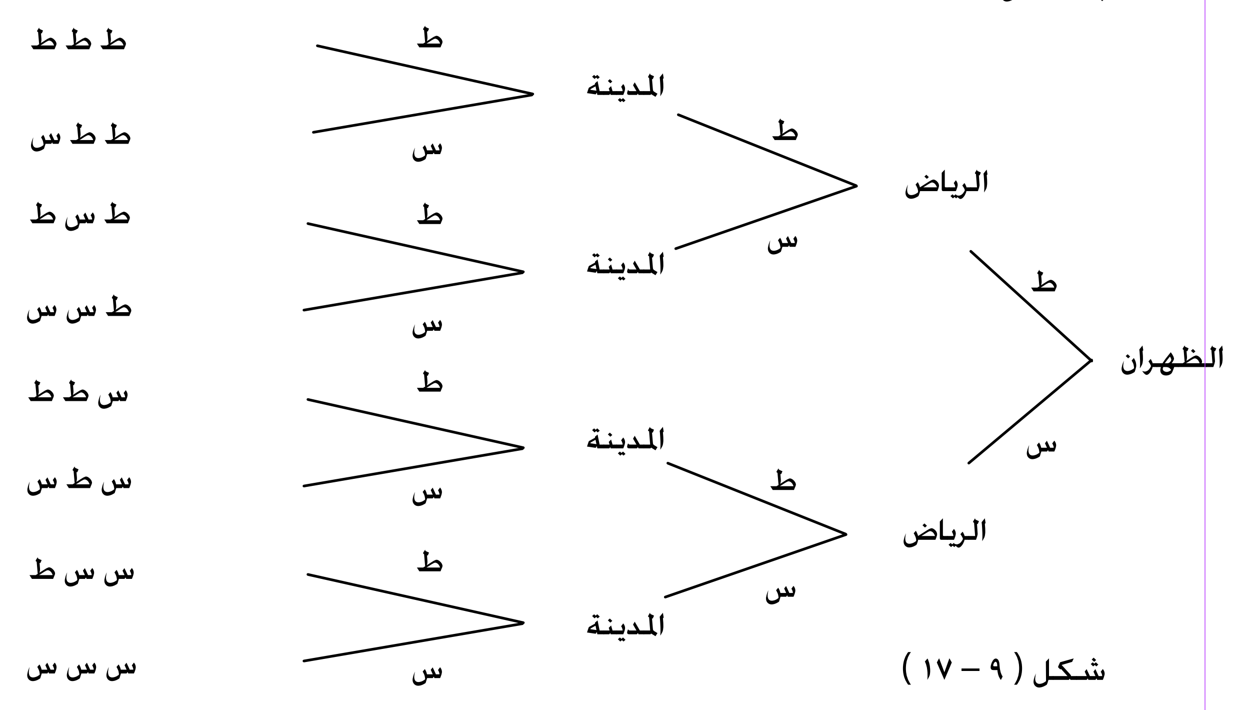
$أ_3$: يركب الطائرة في رحلة واحدة على الأقل .

الحـــــــل :

في كل مرحلة من مراحل الرحلة ، يوجد اختياران لوسيلة المواصلات ، هما طائرة أو سيارة. فإذا رمزنا لفراغ العينة بالرمز ش~ ، وللطائرة بالرمز ط ، وللسيارة بالرمز س ، فإن :

ش~ = { (ط ، ط ، ط) ، (ط ، ط ، س) ، (ط ، س ، ط) ،

ويمكن التعبير عن هذه الرحلة بما يسمى **المخطط الشجري** أو **شجرة النواتج** كما بالشكل (٩ – ١٧) :



شكل (٩ – ١٧)

واضح من الرسم أن كل فرع من فروع المخطط الشجري، ابتداءً من الظهران وانتهاءً بجدة يحدد ناتجاً من نواتج الرحلة الممكنة. فمثلاً، الفرع الأعلى يحدد الناتج ط ط ط، أما الفرع الأدنى فيحدد الناتج س س س. وهكذا نحصل على جميع عناصر فراغ العينة، وهي ثمانية ، يناظر كل منها فرعاً من فروع الشجرة.

وبكتابة ط س ط لِنعبر عن (ط ، س ، ط) للاختصار ، فإن :

ش = { ط ط ط ، ط ط س ، ط س ط ، ط س س ، س س ط ،

س ط س ، س ط ط ، س س س }

ويكـون :

$أ_1$ = { ط ط ط } ،

$أ_2$ = { ط ط س ، ط س ط ، س ط ط } ،

$أ_3$ = { ط ط ط ، ط ط س ، ط س ط ، ط س س ، س ط ط ، س ط س ، س س ط }

تمارين (٩ – ٣)

(١) أكملي مايلي بحيث تكون العبارة صحيحة :

(أ) بدأت نظرية الاحتمالات في الظهور عام .... على يد العالم ....

(ب) فراغ العينة هو ....

(حـ) الحادثة في تجربة معينة هي ....

(ى) الحادثة البسيطة هي ....

(٢) اكتبي فراغ العينة للتجربة الآتية :

اختيار عدد صحيح س بحيث يقبل س القسمة على ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ١٥ .

(٣) سحب إبراهيم ثلاث كرات واحدة بعد الأخرى من كيس به كرات متماثلة، إلاّ من حيث اللون، وهي ٤ كرات بيض، ٣ حمر. إذا كان إبراهيم لا يرى الكرة المسحوبة، أكتبي فراغ العينة.

(٤) لأحمد الحق أن يختار نوعين من الفاكهة في مطعم، واحدة بعد الأخرى، وكان بالمطعم

برتقال وتفاح . أكتبي فراغ النواتج وكلاً من الحوادث التالية :

أ$_1$ = أن يختار تفاحاً مرة واحدة على الأكثر .

أ$_2$: أن يختار تفاحاً أو برتقالاً مرتين .

أ$_3$: أن يختار برتقالاً مرة واحدة على الأقل .

(٥) في التمرين (٢) أكتبي الحوادث التالية :

(أ) العدد يقبل القسمة على ٢ أو ٥ .

(ب) العدد أقل من ١٣ ويقبل القسمة على ٣ .

(حـ) العدد زوجي ويقبل القسمة على ٥ .

(ء) العدد فردي أكبر من ١٠ .

(٦) يراد تكوين لجنة من المدرسين أ ، ب ، حـ تتكون من عضوين فقط . اكتبي فراغ العينة .

(٧) من بين خمسة موظفين أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، نريد اختيار لجنة من ثلاثة أعضاء :

(أ) اكتبي فراغ العينة الذي يعبر عن جميع اللجان الممكنة .

(ب) اكتبي الحادثة « أ ، ب ليسا في اللجنة »

(حـ) اكتبي الحادثة « ب ليس في اللجنة »

(ء) اكتبي الحادثة « أ ، ب في اللجنة »

٩ - ٨ العمليات على الحوادث العشوائية

عرفنا الحادثة على أنها مجموعة جزئية لفراغ العينة. فإذا كان لدينا فراغ عينة يحتوي على م من العناصر أي أن :

$$ش = \{ س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، .... ، س_م \}$$

فإن عدد المجموعات الجزئية لفراغ العينة ش هو $٢^م$ ، ومن ثم فإن عدد الحوادث المعرفة على ش هو $٢^م$ حادثة أيضاً. وهناك بعض العمليات التي تجرى على الحوادث العشوائية نذكر منها ما يلي :

(أ) إذا كانت أ حادثة في ش فإن :

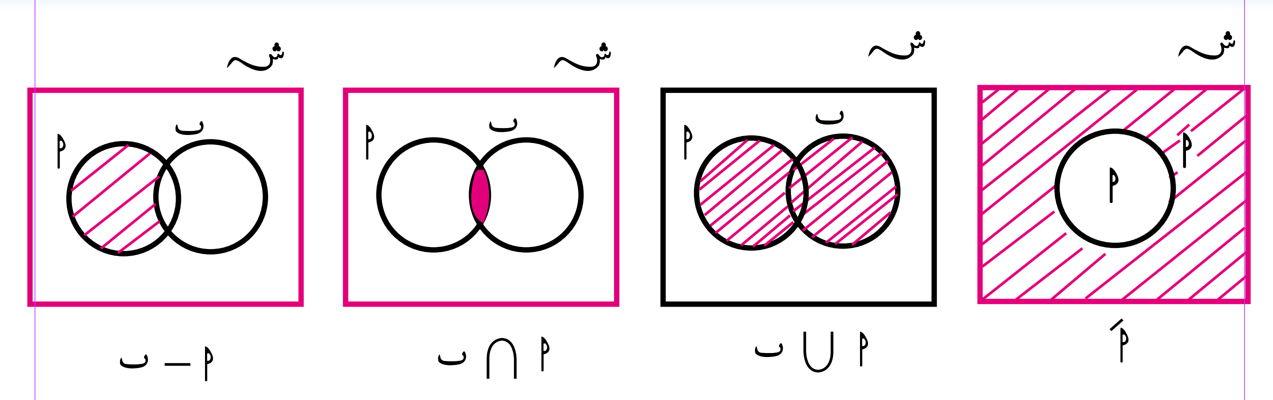
أَ هي الحادثة التي تتكون من عناصر ش والتي لا تنتمي إلى أ ، وترمز إلى عدم وقوع الحادثة أ ، وتسمى مكملة الحادثة أ أو نفيها .

(ب) إذا كانت أ ، ب حادثتين في ش ، فإن

(١) أ $\cup$ ب هي الحادثة التي تتكون من عناصر أ أو ب أو كليهما. وترمز لوقوع أ أو ب أو كليهما. أو بمعنى آخر ترمز لوقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأقل.

(٢) أ $\cap$ ب هي الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين أ ، ب ، وترمز لوقوع الحادثتين أ ، ب معاً .

(٣) أ − ب = أ $\cap$ بَ هي الحادثة التي تتكون من عناصر أ ، والتي لا تنتمي إلى ب. وترمز لوقوع أ وعدم وقوع ب .



مما سبق نستنتج أن :

$\text{أ} \cap \phi = \phi$ ، $\text{أ} \cap \text{ش} = \text{أ}$ ، $\text{أ} \cap \text{أ} = \text{أ}$.

$\text{أ} \cup \phi = \text{أ}$ ، $\text{أ} \cup \text{ش} = \text{ش}$ ، $\text{أ} \cup \text{أ} = \text{أ}$.

(حـ) إذا كانت هناك ن حادثة $\text{أ}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}$ ، ...... ، $\text{أ}_{\text{ن}}$ فإن :

(١) $\text{أ}_{١} \cup \text{أ}_{٢} \cup \text{أ}_{٣} \cup ..... \cup \text{أ}_{\text{ن}}$ هي الحادثة التي تتكون من عناصر واحدة على الأقل من الحوادث $\text{أ}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}$ ، .... ، $\text{أ}_{\text{ن}}$ ، وترمز لوقوع حادثة واحدة على الأقل من هذه الحوادث .

(٢) $\text{أ}_{١} \cap \text{أ}_{٢} \cap \text{أ}_{٣} \cap .... \cap \text{أ}_{\text{ن}}$ هي الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين الحوادث $\text{أ}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}$ ، .... ، $\text{أ}_{\text{ن}}$ ، وترمز لوقوع جميع هذه الحوادث معاً .

مثال (٩ – ١٣)

إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة ، فإن :

ش~ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ويكون :

$ا_1$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } هي حادثة ظهور عدد زوجي .

$ا_2$ = { ١ ، ٣ ، ٥ } هي حادثة ظهور عدد فردي .

$ا_3$ = { ٥ ، ٦ } هي حادثة ظهور عددأكبر من ٤ .

$ا_4$ = { ٣ ، ٦ } هي حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ .

والآن نكوّن الحوادث الآتية :

$ا'_4$ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ } حادثة ظهور عدد لا يقبل القسمة على ٣ .

$ا_1 \cap ا_4$ = { ٦ } حادثة ظهور عدد زوجي يقبل القسمة على ٣ .

$ا_2 \cap ا_3$ = { ٥ } حادثة ظهور عدد فردي أكبر من ٤ .

$ا_2 \cup ا_3$ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } حادثة ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من ٤ .

$ا_1 \cup ا_2$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } = ش حادثة ظهور عدد فردي

أو عدد زوجي

تعريف (٩ – ٧)

يقال إن ا ، ب حادثتان متنافيتان إذا كان وقوع إحداهما يمنع

وقوع

الأخرى ، أي أن :

$ا \cap ب = \phi$.

وفي المثال (٩ – ١٣) $ا_1$ ، $ا_2$ حادثتان متنافيتان ، لأن ظهور عدد زوجي يمنع

٩ - ٩ مسلمات نظرية الاحتمال

إذا كان ش~ فراغ عينة لتجربة ما، وكانت ىه (ش~) مجموعة جميع الحوادث المعرفة على ش~ ، فإنه يوجد تطبيق ح، مجاله المجموعة ىه (ش~)، ومجاله المقابل الفترة المغلقة [٠ ، ١] من الأعداد الحقيقية ، أي أن :

$$ح : ىه (ش~) \longrightarrow [٠ ، ١]$$

وبفرض أ $\in$ ىه (ش~) فإن ح (أ) $\in$ [٠ ، ١] يسمى احتمال الحادثة أ .

إن هذا التطبيق يتمتع بالخواص التالية والتي تسمى **مسلمات نظرية الاحتمال**

(١) $\forall$ أ $\subset$ ش~ فإن ح (أ) $\geq$ ٠

(٢) ح (ش~) = ١

(٣) إذا كانت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ... ، $أ_ن$ حوادث متنافية (بمعنى أن كل حادثتين منها متنافيتان) ، فإن :

$$ح (أ_١ \cup أ_٢ \cup \ldots \cup أ_ن) = ح (أ_١) + ح (أ_٢) + ... + ح (أ_ن)$$

ملاحظات :

(١) – تسمى ح **دالة الاحتمال** ، كما يسمى الزوج (ش~ ، ح) **بفضاء الاحتمال**

$أ \cap ب = \phi$ ، فإن :

$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب)$.

نظرية (٩ – ١)

إذا كانت $\acute{أ}$ هي الحادثة المكملة للحادثة $أ$ ، فإن :

$ح(\acute{أ}) = ١ - ح(أ)$

البرهان :

$ش = أ \cup \acute{أ}$ ، $أ \cap \acute{أ} = \phi$

إذاً $ح(ش) = ح(أ \cup \acute{أ})$

$= ح(أ) + ح(\acute{أ})$ من المسلمة (٣)

إذاً $١ = ح(أ) + ح(\acute{أ})$ من المسلمة (٢)

إذاً $ح(\acute{أ}) = ١ - ح(أ)$.

نتيجة (٩ – ١)

$ح(\phi) =$ صفراً

$\acute{ش} = \phi$

ولكن $ح(\acute{ش}) = ١ - ح(ش)$ من النظرية (٩ – ١)

إذاً $ح(\phi) = ١ - ١$ من المسلمة (٢)

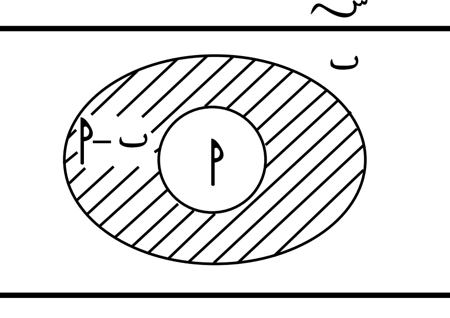
= صفراً .

نظرية (٩ – ٢)

إذا كانت $ℓ \subset$ ب فإن :

ح (ℓ) ≥ ح (ب) .

البرهان :



بما أن $ℓ \subset$ ب

إذاً $ℓ \cap$ (ب – ℓ) = ϕ .

ب = $ℓ \cup$ (ب – ℓ)

إذاً ح (ب) = ح (ℓ) + ح (ب – ℓ) من المسلمة (٣)

ولكن ح (ب – ℓ) ≥ ٠ من المسلمة (١)

إذاً ح (ب) ≥ ح (ℓ) .

نتيجة (٩ – ٢)

$ℓ \subset$ ش $\Leftarrow$ ح (ℓ) ≥ ح (ش) من النظرية (٩ – ٢)

$\Leftarrow$ ح (ℓ) ≥ ١ من المسلمة (٢)

ملاحظة (٩ – ٢)

من المسلمة (١) ونتيجة النظرية (٩ – ٢) . نستنتج أنه لأي حادثة أ يكون :

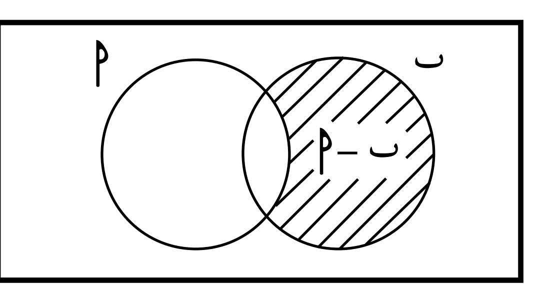
$$٠ \leq ح(أ) \leq ١ .$$

أي أن مجال دالة الاحتمال ح هو ق (ش~) . ومداها محتوي في الفترة المغلقة من الأعداد الحقيقية [٠ ، ١]

نظـريــة (٩ – ٣)

إذا كانت أ ، ب أي حادثتين . فإن :

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب)$$



البـــرهـــان :

من الشكـل يلاحظ أن :

$$أ \cup ب = أ \cup (ب - أ)$$

كما أن :

$$أ \cap (ب - أ) = \phi$$

إذاً ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب – أ) .... (١)

وبما أن : ب = (أ ∩ ب) ∪ (ب – أ) .

إذاً $ح(ب) = ح(أ \cap ب) + ح(ب - أ)$ أي أن :

$ح(ب - أ) = ح(ب) - ح(أ \cap ب)$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب)$.

ملاحظة (٩ - ٣)

من (٢) في برهان النظرية (٩ - ٣) نجد أن :

$ح(ب - أ) = ح(ب) - ح(أ \cap ب)$.

عرفنا فراغ العينة ش~ على انه مجموعة عناصرها جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ، وان الحادثة هي مجموعة جزئية من فراغ العينة. ويمكن تحديد احتمال أي حادثة إذا أمكن تحديد احتمالات الحوادث البسيطة المكونة لفراغ العينة. واحتمالات الحوادث البسيطة يمكن تحديدها من التعريف الآتي :

تعريف (٩ - ٨)

إذا كان ش~ = $\{ أ_{١} ، أ_{٢} ، \cdots ، أ_{ن} \}$ فراغ عينة ، فإن الدالة ح تعين للعنصر $أ_{م}$ العدد الحقيقي $ح(أ_{م})$ الذي يسمى احتمال العنصر $أ_{م}$ على أن يحقق الشرطين :

(١) $٠ \leq ح(أ_{م}) \leq ١$ (٢) $\sum_{م=١}^{ن} ح(أ_{م}) = ١$.

مثال (٩ – ١٤)

إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن فراغ العينة هو :

ش~ = { ص ، ك }

من السهل ملاحظة أن كلاً من الحالات الأربع التالية تتفق مع التعريف (٩ – ٨) :

(١) ح (ص) = $\frac{١}{٢}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٢}$.

(٢) ح (ص) = $\frac{١}{٤}$ ، ح (ك) = $\frac{٣}{٤}$.

(٣) ح (ص) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$.

(٤) ح (ص) = ١ ، ح (ك) = صفراً .

مثال (٩ – ١٥)

قطعة نقود صممت بحيث أن احتمال ظهور الصورة ضعفا احتمال ظهور الكتابة.

ألقيت مرة واحدة . أكتبي فراغ العينة ، وأوجدي احتمالات الحوادث البسيطة .

الحـــــل :

ش~ = { ص ، ك }

ولكن س + ٢ س = ١ من التعريف (٩ – ٨)

إذاً س = $\frac{١}{٣}$ وعلى ذلك فإن :

ح (ص) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$.

تعريف (٩ – ٩)

يعرَّف احتمال أي حادثة أ بأنه مجموعة احتمالات عناصر فراغ العينة المنتمية إلى أ .

مثال (٩ – ١٦)

ألقي حجر نرد مثقل ، بحيث أن احتمال ظهور أي عدد يتناسب مع هذا العدد .

والمطلوب :

(١) كتابة فراغ العينة .

(٢) تحديد احتمالات الحوادث البسيطة .

(٣) حساب احتمال ظهور عدد زوجي .

(٤) حساب احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ .

الحـــــــل :

(٢) بما أن احتمال ظهور العدد يتناسب مع هذا العدد . لذلك فإن :

ح (١) = ك ، ح (٢) = ٢ ك ، ح (٣) = ٣ ك ،

ح (٤) = ٤ ك ، ح (٥) = ٥ ك ، ح (٦) = ٦ ك .

بالجمع ينتج ان : ٢١ ك = ١ $\Longleftrightarrow$ ك = $\frac{١}{٢١}$.

ح ({ ١ }) = ح (١) = $\frac{١}{٢١}$ ، ح ({ ٢ }) = ح (٢) = $\frac{٢}{٢١}$ ، ح ({ ٣ }) = ح (٣) = $\frac{٣}{٢١}$ ،

ح ({ ٤ }) = ح (٤) = $\frac{٤}{٢١}$ ، ح ({ ٥ }) = ح (٥) = $\frac{٥}{٢١}$ ، ح ({ ٦ }) = ح (٦) = $\frac{٦}{٢١}$

(٣) نفرض أن أ هي حادثة ظهور عدد زوجي .

إذاً أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } .

إذاً ح (أ) = ح (٢) + ح (٤) + ح (٦)

= $\frac{٢}{٢١}$ + $\frac{٤}{٢١}$ + $\frac{٦}{٢١}$ = $\frac{٤}{٧}$.

(٤) نفرض أن ب هي حادثة ظهور عدد أكبر من ٤ .

إذاً ب = { ٥ ، ٦ }

إذاً ح (ب) = ح (٥) + ح (٦)

= $\frac{٥}{٢١}$ + $\frac{٦}{٢١}$ = $\frac{١١}{٢١}$

غالباً ما نجد أن الخواص الطبيعية للتجربة تفرض تعيين أو تخصيص احتمالات متساوية لنتائج التجربة. في مثل هذه الحالات إذا كانت ش~ تحتوي على ن عنصراً فإن :

$$ح(أ_م) = \frac{١}{ن} \qquad \text{حيث } م = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن$$

و إذا كانت هناك حادثة أ تحتوي على ل عنصراً فإن :

$$ح(أ) = \frac{ل}{ن} = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ش~}}$$

مثال (٩ – ١٧)

ألقي حجر نرد مرة واحدة . فما احتمال ظهور عدد زوجي ؟

الحـــــل :

ش~ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

فإذا كان حجر النرد متماثلاً من حيث الأبعاد والكثافة . فإنه من المعقول أن نفرض تساوي احتمال ظهور أي وجه وعلى ذلك :

$$ح(١) = ح(٢) = ح(٣) = ح(٤) = ح(٥) = ح(٦) = \frac{١}{٦}$$

فإذا كانت أ حادثة ظهور عدد زوجي ، فإن :

أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ويكون :

$$ح(ﻢ) = \frac{\text{عدد عناصر } ﻢ}{\text{عددعناصر ش}}$$

$$= \frac{3}{6} \qquad = \frac{1}{2}.$$

مثال (٩ – ١٨)

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة . فما احتمال الحصول على مجموع قدره ٩ ؟

الحــــــــــل :

نعلم من المثال (٩ – ٨) أن عدد عناصر ش = ٣٦ عنصراً . ونفرض أن ﻢ هي حادثة ظهور مجموع قدره ٩ .

إذاً ﻢ = { (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٣) }

$$\text{إذاً } ح(ﻢ) = \frac{\text{عدد عناصر } ﻢ}{\text{عددعناصر ش}}$$

$$= \frac{4}{36}$$

$$= \frac{1}{9}.$$

ولتعين عددعناصر ش أو أي حادثة ﻢ ، فإننا سنعتمد على بعض القوانين التي سبق أن درستها في باب الاختبار والاستنتاج الرياضي ، ونذكر منها :

(١) عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ر من الأشياء من بين ن من هذه الأشياء

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} = \frac{\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$$

مثال (٩ – ١٩)

إذا كان لدينا ٤ رجال وأريد إرسال اثنين منهم في بعثة ، فإنه يمكن اختيار

أعضاء البعثة بعدد من الطرق $= \binom{٤}{٢}$ ، أي أن :

عدد الطرق $= \binom{٤}{٢} = \frac{٤!}{٢!\,(٤-٢)!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤}{١\times٢\times١\times٢} = ٦$ طرق .

مثال (٩ – ٢٠)

صندوق به ٨ كرات متماثلة ، سحبت منه ٣ كرات . فما هي عدد الطرق التي

يمكن بها إجراء هذه العملية ؟

الحـــــــــل :

عدد الطرق $= \binom{٨}{٣} = \frac{٨!}{٣!\,٥!} = ٥٦$ طريقة .

(٢) إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق مختلفة عددها ل ، وأمكن إجراء عملية أخرى بطرق مختلفة عددها م ، فإنه يمكن إجراء العمليتين معاً بطرق عددها لم.

مثال (٩ – ٢١)

ماهو عدد الطرق التي يمكن بها تكوين بعثة مكونة من ٣ رجال وامرأتين من بين ٦ رجال ، ٥ نساء ؟

الحـــل :

عدد طرق اختيار الرجال $= \binom{٦}{٣} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠$ طريقة

عدد طرق اختيار النساء $= \binom{٥}{٢} = \frac{{}^{٥}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} = ١٠$ طرق

عدد طرق تكوين البعثة $= ٢٠ \times ١٠ = ٢٠٠$ طريقة .

مثال (٩ – ٢٢)

صندوق به ٥ كرات بيض ، ٤ كرات حمر ، سحبت منه كرتان معاً . فما احتمال أن تكون (أ) الكرتان بيضاوين ؟ (ب) واحدة بيضاء والأخرى حمراء ؟

الحـــل :

عدد عناصر فراغ العينة ش = عدد طرق سحب كرتين من الصندوق

$= \binom{٩}{٢} = \frac{{}^{٩}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١} = ٣٦$ عنصراً

(١) نفرض أن أ هي حادثة سحب كرتين بيضاوين

إذاً عددعناصر $أ = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ عناصر

$$ح(أ) = \frac{\text{عدد عناصر } أ}{\text{عددعناصر } ش} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(ب) نفرض أن ب هي حادثة سحب كرتين واحدة بيضاء والأخرى حمراء .

عدد عناصر ب = عدد طرق سحب كرة بيضاء X عدد طرق سحب كرة حمراء

$$= \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} = 5 \times 4 = 20$$

$$ح(ب) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

مثال (٩ – ٢٣)

سحبت ورقتان عشوائياً من بين ١٠ ورقات مرقمة من ١ الى ١٠ . أوجدي

احتمال أن يكون المجموع فردياً إذا :

(١) سحبت الورقتان معاً .

(٢) سحبت ورقتان واحدة بعد الأخرى دون إحلال .

(٣) سحبت ورقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال .

الحـــــــــل :

(١) عددعناصر $ش = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ عنصراً . ولكي يكون

المجموع فردياً. فلا بد أن تكون إحدى الورقتين فردية ، والأخرى زوجية.

عدد طرق سحب ورقة فردية = ٥ ،

عدد طرق سحب ورقة زوجية = ٥

إذاً عدد طرق سحب الورقتين معاً = ٥ × ٥ = ٢٥

فإذا كانت أ هي حادثة سحب ورقتين مجموعهما فردي معاً ، فإن :

$$ح(أ) = \frac{٢٥}{٤٥} = \frac{٥}{٩}$$

(٢) نفرض أن ب هي حادثة سحب ورقتين مجموعهما فردي ، واحدة بعد الأخرى ، دون إحلال (أي لا تعاد الورقة المسحوبة إلى المجموعة قبل سحب الورقة التالية) . في هذه الحالة يكون :

عدد طرق سحب الورقة الأولى = ١٠ ،

عدد طرق سحب الورقة الثانية = ٩ .

ويكون عدد عناصر ش = ١٠ × ٩ = ٩٠ عنصراً .

ولكي يكون المجموع فردياً ، قد تكون الورقة الأولى فردية والثانية زوجية ،

أو قد تكون الورقة الأولى زوجية والثانية فردية .

عدد طرق سحب ورقتين الأولى فردية والثانية زوجية = ٥ × ٥ = ٢٥ ،

عدد طرق سحب ورقتين الأولى زوجية والثانية فردية = ٥ × ٥ = ٢٥

إذاً عدد طرق سحب ورقتين واحدة بعد الأخرى ومجموعهما فردي

= ٢٥ + ٢٥ = ٥٠ ، يكون :

$$ح(ب) = \frac{٥٠}{٩٠} = \frac{٥}{٩} .$$

(٣) نفرض أن حـ حادثة سحب ورقتين مجموعهما فردي واحدة بعد الأخرى مع الإحلال (أي ترد الورقة المسحوبة إلى المجموعة قبل سحب الورقة التالية). في هذه الحالة:

عدد طرق سحب الورقة الأولى = ١٠ ،

عدد طرق سحب الورقة الثانية = ١٠

إذاً عدد عناصر ش = ١٠ × ١٠ = ١٠^٢ = ١٠٠ عنصر

وعدد طرق سحب ورقتين مجموعهما فردي = ٥٠ كما في (٢)

$$إذاً\ ح(حـ) = \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$$

مثال (٩ – ٢٤)

سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب ، فما احتمال أن تحمل الرقم ثلاثة أو صورة ؟

الحـــــــــل :

نفرض أن ش فراغ العينة ، ٲ حادثة سحب ورقة تحمل الرقم ٣ ، ب حادثة سحب ورقة عليها صورة .

إذاً ٲ ∪ ب هي حادثة سحب ورقة تحمل الرقم ثلاثة أو صورة .

عدد عناصر $ش = \binom{52}{1} = 52$

عدد عناصر $أ = \binom{4}{1} = 4$

عدد عناصر $ب = \binom{12}{1} = 12$

$ح(أ) = \frac{4}{52}$ ، $ح(ب) = \frac{12}{52}$

ولكن أ ، ب حادثتان متنافيتان ، أي أن $أ \cap ب = \phi$ لذلك :

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{12}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

مثال (٩ – ٢٥)

ألقي حجر نرد مرة واحدة . فما احتمال أن يكون السطح الظاهر يقبل القسمة على ٣ أو ٢ ؟

الحـــــــل :

نفرض أن ش فراغ العينة ،

أ : حادثة أن السطح العلوي يقبل القسمة على ٣ ،

ب : حادثة أن السطح العلوي يقبل القسمة على ٢ .

ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، عدد عناصر ش = ٦

أ = { ٣ ، ٦ } ، عدد عناصر أ = ٢

ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، عدد عناصر ب = ٣

أ ∩ ب = { ٦ } ، عدد عناصر أ ∩ ب = ١

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب) ، النظرية (٩ − ٣)

$$= \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

مثال (٩ − ٢٦)

ألقي حجرا نرد متما يزان مرة واحدة فما احتمال ان يكون مجموع النقط على السطحين العلويين لهما ٤ أو ٩ ؟

الحـــــــل :

نفرض أن ش فراغ العينة .

عدد عناصر فراغ العينة = ٣٦ من المثال (٩ − ٨)

نفرض أن أ هي حادثة أن يكون المجموع ٤ .

إذاً أ = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) } ، عدد عناصر أ = ٣

ونفرض أن ب هي حادثة أن يكون المجموع ٩

إذاً ب = { (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٣) } ،

عدد عناصر ب = ٤

$$ا \cap ب = \phi \Leftarrow ح(ا \cup ب) = ح(ا) + ح(ب)$$

$$= \frac{٣}{٣٦} + \frac{٤}{٣٦} = \frac{٧}{٣٦}$$

تمارين (٩ – ٤)

(١) صندوق به ٣ كرات حمر ، ٦ كرات زرق ، ٥ كرات بيض ، ٦ كرات خضر . سحب عبدالرحمن كرة واحدة من الصندوق بطريقة عشوائية .

احسبي احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(ا) حمراء (ب) بيضاء (حـ) زرقاء (ى) خضراء

(هـ) بيضاء أو حمراء (و) زرقاء أو خضراء (ز) خضراء أو بيضاء

(ح) بيضاء أو زرقاء (ط) بيضاء أو حمراء أو زرقاء

(ى) خضراء أو حمراء أو بيضاء .

(٢) في تجربة الصندوق في التمرين (١) احسبي احتمال أن تكون الكرة :

(ا) ليست بيضاء (ب) ليست حمراء (حـ) ليست زرقاء

(ى) ليست خضراء (هـ) ليست خضراء ولا بيضاء .

(و) ليست حمراء ولا زرقاء (ز) ليست بيضاء ولا حمراء ولا خضراء

(٣) إذا ألقي حجر نرد منتظم . احسبي احتمالات الحوادث التالية :

(ا) ظهورعدد فردي . (ب) ظهورعدد يقبل القسمة على ٣ .

(حـ) ظهور عدد زوجي .	(ى) ظهور عدد سالب .

(هـ) ظهور عدد أقل من أو يساوي ٥	(و) ظهور عدد أكبر من ٤

(٤) إذا سحبت ورقة من أوراق اللعب ، فأوجدي ما يأتي :

(أ) احتمال سحب ورقة حمراء .

(ب) احتمال سحب ورقة بها ٨ نقاط .

(حـ) احتمال سحب ورقة عليها قلب .

(ى) احتمال سحب ورقة عليها نقطة حمراء .

(هـ) احتمال سحب ورقة عليها قلب وبها نقطة واحدة .

(٥) ألقيت ثلاث قطع نقود منتظمة ومتمايزة . احسبي ما يلي :

(أ) احتمال ظهور صورة واحدة أو صورتين .

(ب) احتمال ظهور صورة واحدة أو ثلاث صور .

(حـ) احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل .

(ى) احتمال ظهور صورة أو عدم ظهور كتابة .

(٦) أختير عدد من العشرين عدداً الصحيحة الموجبة الأولى بطريقة عشوائية .

احسبي احتمال أن يكون العدد :

(أ) زوجياً أو يقبل القسمة على ٣ .

(ب) فردياً أو يقبل القسمة على ٥ .

(حـ) يقبل القسمة على ٢ أو على ٣ .

(ى) لا يقبل القسمة على ٢ أو لا يقبل القسمة على ٣ .

(هـ) لا يقبل القسمة على ٣ أو زوجياً.

(٧) في دراسة أجريت على مكتب البريد ، وجد أن احتمالات تسجيل الرسائل في ربع ساعة كالآتي :

عدد الرسائل	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	أكثر من ١١
الاحتمال	٠,٠٠١	٠,٠٠٤	٠,٠١٥	٠,٠١٢	٠,١٠٠	٠,١٠٦	٠,١٢	٠,١٩	٠,٢	٠,١٤	٠,١	٠,٠٤	٠,٠١

احسبي الاحتمالات الآتية :

(أ) أن يسجل المكتب ٤ رسائل أو ٥ رسائل أو ١١ رسالة .

(ب) أن يسجل المكتب ٧ رسائل على الأقل .

(حـ) أن يسجل المكتب ٩ رسائل على الأكثر .

(ى) أن يسجل المكتب رسائل عددها س حيث ٣ < س < ١١ .

(٨) في كلية العلوم بإحدى الجامعات ١٠٠ طالب منهم ٤٠ يدرسون الرياضيات، ٣٥ يدرسون الفيزياء ، ٢٥ يدرسون الكيمياء ، ١١ يدرسون الرياضيات والفيزياء فقط ، ٦ يدرسون الكيمياء والفيزياء فقط ، ٤ يدرسون الرياضيات والكيمياء فقط، ٣ يدرسون المواد الثلاث. أختير طالب منهم عشوائيا . احسبي احتمال أن يكون هذا الطالب من بين الذين يدرسون :

(أ) الرياضيات (ب) الكيمياء (حـ) الفيزياء

(ى) الرياضيات أو الكيمياء (هـ) الرياضيات أو الفيزياء

(و) الفيزياء أو الكيمياء

(٩) في التمرين (٨) احسبي احتمال أن يكون الطالب من بين الذين :

(أ) يدرسون الرياضيات فقط (ب) يدرسون الفيزياء و الكيمياء

(حـ) يدرسون الكيمياء فقط (ى) لا يدرسون الرياضيات ولا الكيمياء

(هـ) لا يدرسون الرياضيات و يدرسون الكيمياء.

(١٠) تنتج إحدى الآلات في مصنع للقمصان الجاهزة ٢٪ من القمصان معيبة، ٩٨٪ قابلة للتصدير. سحب قميص من الانتاج. عرّفي فراغ عينة مناسباً لهذه التجربة، وحددي احتمالات مناسبة للحوادث البسيطة، ثم أوجدي احتمال الحادثة (القميص معيب أو قابل للتصدير).

(١١) صندوق به ٣ كرات بيض، ٧ كرات حمر . سحبت منه كرتان عشوائياً واحدة بعد الأخرى بدون إحلال . احسبي احتمال :

(أ) أن تكون الكرتان بيضاوين .

(ب) أن تكون الكرتان حمراوين .

(حـ) أن تكون إحدى الكرتين بيضاء والأخرى حمراء .

(١٢) في موقف سيارات توجد ٧ أماكن على هيئة دائرة لوقوف السيارات فإذا وقفت سيارتان عشوائياً في مكانين من هذه الدائرة ، فاحسبي احتمال أن تكون السيارتان متجاورتين . وإذا كانت الأماكن على استقامة واحدة ، فما احتمال أن تكون السيارتان متجاورتين ؟ .

٩ - ١٠ الاحتمالات المشروطة والحوادث المستقلة

في كثير من الحالات نحتاج إلى إيجاد احتمال وقوع حادث أ بشرط وقوع الحادثة ب. ويسمي هذا الاحتمال **بالاحتمال المشروط**. ونرمز له بالرمز ح (أ | ب). أي احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب. ويحدد هذا الاحتمال من التعريف التالي:

تعريف (٩ - ١٠)

إذا كانت أ ، **ب** حادثتين في فراغ عينة وكان ح (**ب**) ≠ صفراً ، فإن :

$$ح(أ | ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

مثال (٩ - ٢٧)

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة . فما احتمال ظهور مجموع قدره

٨ إذا

علم أن مجموع النقط علي السطح العلوي زوجي ؟

الحـــــــل :

نفرض أن ش فراغ العينة . إذاً عدد عناصر ش = ٣٦ عنصراً . ونفرض

أ = { (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٢) }

عدد عناصر أ = ٥ .

ب حادثة أن مجموع النقط زوجي ، فيكون عدد عناصر ب = ١٨ عنصراً

أ $\cap$ ب هي حادثة مجموع النقط زوجي ويساوي ٨ ، فيكون عدد عناصر

أ $\cap$ ب = ٥

ح (أ) = $\frac{٥}{٣٦}$ ، ح (ب) = $\frac{١٨}{٣٦}$ ، ح (أ $\cap$ ب) = $\frac{٥}{٣٦}$

إذاً ح (أ | ب) = $\frac{ح (أ \cap ب)}{ح (ب)}$

= $\frac{٥}{٣٦}$ ÷ $\frac{١٨}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٨}$.

مثال (٩ – ٢٨)

ألقي حجرا نرد مرة واحدة . فإذا كان مجموع النقط ٦ ، فاحسبي احتمال أن يكون أحد الحجرين فقط عليه الرقم ٢ .

الحـــــــل :

ش = فراغ العينة ، عدد عناصر ش = ٣٦ عنصراً

أ = أحد الحجرين عليه الرقم ٢ .

أ = { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ،

$(١ ، ٢)$ ، $(٣ ، ٢)$ ، $(٤ ، ٢)$ ، $(٥ ، ٢)$ ، $(٦ ، ٢)$ }

عدد عناصر أ = ١٠

ب = مجموع النقط على السطح العلوي ٦ .

= { $(١ ، ٥)$ ، $(٢ ، ٤)$ ، $(٣ ، ٣)$ ، $(٤ ، ٢)$ ، $(٥ ، ١)$ }

عدد عناصر ب = ٥ .

أ $\cap$ ب = { $(٢ ، ٤)$ ، $(٤ ، ٢)$ } ، عدد عناصر أ $\cap$ ب = ٢

$$ح(ب) = \frac{٥}{٣٦} \quad ، \quad ح(أ \cap ب) = \frac{٢}{٣٦}$$

$$ح(أ | ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

$$= \frac{٢}{٣٦} \div \frac{٥}{٣٦} = \frac{٢}{٥}$$

من التعريف (٩ – ١٠) نلاحظ أن :

$$ح(أ \cap ب) = ح(ب)\, ح(أ | ب)$$

وتسمى هذه **بقاعدة ضرب الاحتمالات** ويمكن تعميمها لأكثر من حادثتين

على النحو التالي :

$$ح(أ_١ \cap أ_٢ \cap أ_٣) = ح(أ_١)\, ح(أ_٢ | أ_١)\, ح(أ_٣ | أ_١ \cap أ_٢) .$$

مثال (٩ – ٢٩)

صندوق به ١٢ تفاحة منها ٤ تالفة . أختير عشوائياً ثلاث تفاحات واحدة بعد الأخرى . احسبي احتمال أن تكون جميعاً جيدة .

الحـــــــــــــل :

نفرض ان $أ_١$ حادثة التفاحة الأولى جيدة . إذاً ح ($أ_١$) = $\frac{٨}{١٢}$ ،

$أ_٢$ حادثة أن التفاحة الثانية جيدة . إذاً ح ($أ_٢ | أ_١$) = $\frac{٧}{١١}$ ،

$أ_٣$ حادثة أن التفاحة الثالثة جيدة . إذاً ح ($أ_٣ | أ_١ \cap أ_٢$) = $\frac{٦}{١٠}$ ،

وبما أن ح ($أ_١ \cap أ_٢ \cap أ_٣$) = ح ($أ_١$) ، ح ($أ_٢ | أ_١$) ح ($أ_٣ | أ_١ \cap أ_٢$) .

إذاً ح ($أ_١ \cap أ_٢ \cap أ_٣$) = $\frac{٨}{١٢} \times \frac{٧}{١١} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{٥٥}$

مـن الـواضـــح أن هـــنـاك فـــرقاً بيـن ح (أ) ، ح (أ | ب) . ولـكـــن إذا

حـــــدث أن

ح (أ) = ح (أ | ب) فهذا يعني أن احتمال وقوع الحادثة أ لا يعتمد على وقوع أو عدم وقوع الحادثة ب . وفي هذه الحالة يقال إن أ ، ب حادثتان مستقلتان ويكون :

تعـريف (٩ – ١١)

إذا كـانت أ ، ب حـادثتين فـي فـراغ العـينـة . فيقال إن أ ، ب حـادثتان مسـتقلتان إذا كـان :

ح (أ ⋂ ب) = ح (أ) ح (ب) .

مثال (٩ – ٣٠)

ألقـي حـجرا نـرد مـتمايزان مـرة واحـدة . فـما احـتمال ظـهـور ٤ عـلـى الحـجر الأول ، ٣ عـلـى الحـجـر الـثانـي ؟

الحــــــــل :

نـفـرض أن أ حـادثة ظـهـور ٤ عـلـى الحـجـر الأول .

ب حـادثة ظـهـور ٣ عـلـى الحـجـر الـثانـي .

واضـح أن أ ، ب حـادثـتان مسـتـقـلـتان وعـلـيه :

ح (أ ⋂ ب) = ح (أ) ح (ب)

$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$.

الخـــلاصــــــة

درسـنـا فـي الاحـتـمالات مايلـي :

نستطيع أن نتنبأ بالضبط أي من هذه النواتج سيتحقق .

(٢) الحادثة هي أي مجموعة جزئية لفراغ العينة .

(٣) لكل عنصر $أ_م$ في $\widetilde{ش}$ يوجد $ح(أ_م)$ بحيث إن :

$$\text{صفر} \leq ح(أ_م) \leq 1 \text{ ، } \sum_{م=1}^{ن} ح(أ_م) = 1 \text{ .}$$

(٤) إذا كانت $أ \subset ب$ ، فإن $ح(أ) \leq ح(ب)$.

(٥) إذا كانت أ ، ب $\subset \widetilde{ش}$ فإن :

$$(أ)\quad ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب)$$

$$(ب)\quad ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) \text{ ، إذا كان } أ \cap ب = \phi$$

(٦) إذا كان أ ، ب $\subset \widetilde{ش}$ ، ح (ب) $\neq$ ٠ ، فإن :

$$ح(أ \mid ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}$$

(٧) إذا كانت $أ \subset \widetilde{ش}$ ، فإن : $ح(\acute{أ}) = 1 - ح(أ)$.

(٨) تكون أ ، ب حادثتين مستقلتين إذا كان :

$$ح(أ \cap ب) = ح(أ)\, ح(ب) \text{ .}$$

تمارين (٩ – ٥)

(١) سحبت ورقة من مجموعة أوراق لعب . أوجدي احتمال أن تكون عليها نقطة واحدة أو صورة ولد . ثم أوجدي احتمال أن تكون عليها نقطة واحدة أو قلب أحمر .

(٢) رميت قطعة نقود مرتين . فإذا كانت $أ_{١}$ حادثة أن يظهر في الرمية الثانية كتابة ، $أ_{٢}$ حادثة ظهور نفس الشيء في الرميتين . احسبي :

(أ) ح ($أ_{١} \cap أ_{٢}$) ،(ب) ح ($أ_{٢} | أ_{١}$) ، (حـ) ح ($أ_{١} | أ_{٢}$)

(ى) هل $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، حادثتان مستقلتان ؟ عللي إجابتك .

(٣) عشرة مصابيح منها ٣ تالفة . أختبر منها مصباحان واحداً بعد الآخر . فما احتمال (أ) أن المصباحين تالفان .

(ب) أن المصباحين سليمان .

(حـ) أن أحدهما سليم والآخر تالف .

(٤) في تجربة رمي ثلاثة قروش متمايزة . احسبي احتمالات الحوادث التالية :

$أ_{١}$ حادثة ظهور ثلاث صور ، $أ_{٢}$ حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل ،

$أ_{٣}$ حادثة ظهور صورتين على الاكثر . ثم احسبي كلا مما يلي :

(أ) ح ($أ_{١} | أ_{٢}$) (ب) ح ($أ_{١} | أ_{٣}$)

(حـ) ح ($أ_{٢} | أ_{٣}$) (ى) ح ($أ_{٣} | أ_{٢}$) .

(٥) في التمرين (٤) حددي ما إذا كانت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ حوادث مستقلة بعضها عن بعض .

(٦) في التمرين (٤) احسبي الاحتمالات الآتية :

(أ) ظهور صورة على كل من القروش الثلاثة .

(ب) ظهور صورة على قرش واحد على الأكثر .

(حـ) ظهور صورة على قرش واحد على الأقل .

(٧) يختار مدير أحد المطاعم يومين من أيام الأسبوع عشوائيا يقدم فيهما سمكاً ، وثلاثة أيام يقدم فيها فاكهة . احسبي الاحتمالات الآتية :

(أ) أن يقدم سمكاً وفاكهة .

(ب) أن لا يقدم سمكاً ولا فاكهة .

(٨) إذا كانت أ ، ب حادثتين مستقلتين فأثبتي أن :

(أ) أ ، بَ حادثتان مستقلتان .

(ب) أَ ، بَ حادثتان مستقلتان .

أجوبة بعض تمارين
كتاب الصف الثاني الثانوي
الجزء الثاني

أجوبة التمارين (٦ – ١)

١ – أ) (١٠ ، ٠) ، ب) (٢٩ ، ٠) ، حـ) (-١ ، ٠) ، د) (٤ ، ٠)

(٢) العمليتان المعرفتان لا تجعلان من الأعداد المركبة حقلاً .

(٣) – أ) ١ = ١ + ت × ٠ ، ب) ٠ = ٠ + ت × ٠ ، حـ) ٥ = ٥ + ٠ × ت ،

و) ٠ + (-١) ت ، ك) ٧ + ٥ ت ، ل) – ٣ ت ٠

٤ – أ) ت ، ب) – ١ ، حـ) – ت ، ى) ١ ، هـ) ١ ، و) ت .

٦ – أ) ١٤ + ٥ ت ، ب) ٢٩ – ٤ ت ، هـ) ٢ ص ت .

٧ – أ) ٣٢ + ٧٥ ت ، ب) ١٢ - ٥ ت ، حـ) ١٥ + ٥ ت ، ى) – ٦ – ١٤ ت ،

هـ) ١٦ + ٣٠ ت ، ح) $أ^٢ + ب^٢$ ، ر) $أ^٢ – ب^٢ + ٢ أ ب$ ت

٨ - ى) $\frac{٢}{٥} – \frac{١}{٥}$ ت ، هـ) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت ، م) $\frac{-٧}{٢٥} + \frac{٢٤}{٢٥}$ ت ،

ح) $\frac{س^٢ - ص^٢}{س^٢ + ص^٢} – \frac{٢ س ص}{س^٢ + ص^٢}$ ت ، ط) $\frac{٧١}{٢٥} – \frac{٢٠٣}{٢٥}$ ت

٩ – أ) ٢ س ، ب) ٢ ص ت ، حـ) $س^٢ + ص^٢$

١٠ – العدد المركب الذي يساوى معكوسه الجمعي هو الصفر . والعددان المركبان اللذان يساوي كل منهما معكوسه الضربي هما : ١ ، - ١

أجوبة التمارين (٦ – ٢)

١ - أ) $\pm$ ٢ $\sqrt{١٧}$ ت ، ب) $\pm$ ٤ ت ، حـ) $\pm$ $\frac{٢}{\sqrt{٧}}$ ت ، ى) ٤ $\pm$ ٢ ت ،

هـ) $\frac{٣ \pm \sqrt{٢١٧}}{٨}$

٢- أ) { (٢ + ت) ، (- ٢ – ت) }

ى) $- \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت .

٣- أ) س = - ٤ ، ص = -٥ ، ب) س = - أ ، ص = - ب

حـ) س = $\frac{٣}{٢٥}$ ، ص = - $\frac{٤}{٢٥}$

ى) س = $\frac{أ}{أ^٢ + ب^٢}$ ، ص = $\frac{- ب}{أ^٢ + ب^٢}$

٤– أ) س = ٢ ، ص = ٧ ، ب) س = ٦ ، ص = ٤ ،

حـ) س = ٧ ، ص = ٠

ى) س = – ٥ ، ص = ١٢ ، هـ) س = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

أو س = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ، ص = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٥- أ) (ب – أت) (ب + أت) ، ب) (٣ – ت) (٣ + ت) .

حـ) (١١ – ٢ ت) (١١ + ٢ ت)

٦- أ) ع = ± ٣ ت ، ب) ع = $\frac{-١ \pm ٢\sqrt{٢}\,ت}{٣}$

حـ) ع = $\frac{١ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ ،

ء) مجموعة الحل { -١ ، ١ ، ت ، -ت } .

هـ) مجموعة الحل { ٢ ، -١ – ت$\sqrt{٣}$ ، -١ + ت $\sqrt{٣}$ }

٧- أ) ع = ٤ – ٣ ت أو ع = -٤ – ٣ ت ، ب) ع = ١٢ + ٥ ت أو

ع = -١٢ + ٥ ت

٨- أ) س = - $\frac{٧}{٣}$ ، ص = -٢٤ ، ب) س = $\frac{٢}{٥}$ ، ص = $\frac{-١}{٥}$

حـ) س = -١ ، ص = ٠

٩- مجموعة الحل :

{ $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت ، - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ – $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت ،

- $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ – $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت }

أجوبة التمارين (٦ – ٣)

٢٣) أ) ١ + ت ، ب) $\frac{٣}{٢}$ - ت $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ، حـ) – ١ + ت $\sqrt{٣}$ ،

د) ت ، هـ) – $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ – $\frac{٧}{٢}$ ت ، و) – ٩ .

٢٤) أ) ٥ (حتا ٠° + ت حا ٠°) ، ب) ٥ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) ..

حـ) ٥ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) ، د) ٥ (حتا – ٩٠° + ت حا – ٩٠°)

هـ) ٤ (حتا – ٦٠° + ت حا – ٦٠°) ،

و) ١٠ (حتا – ١٥٠° + ت حا – ١٥٠°) .

ز) ٦ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°) ،

ح) ٢ $\sqrt{٢}$ (حتا - ١٣٥° + ت حا – ١٣٥°) .

ط) $\sqrt{٢}$ (حتا – ١٣٥° + ت حا - ١٣٥°) .

ى) ٢ (حتا - ٤٥° + ت حا - ٤٥°)

٢٥ أ) – $\sqrt{٣}$ + ت ، ٢ ت ، ب) – ٦ – ٦ $\sqrt{٣}$ ت ، - $\frac{٣}{٤}$

حـ) ت ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت

حل التمارين العامة

٢ – أ) – ١ + ٤ ت ، ب) ٦ + ت ، حـ) – ٨ – ٥ ت .

ى) ٣٥ + ١٨ ت ، هـ) ٧ − ٥ ت ، و) − ٤ ت .

ر) $أ^٢ − ب^٢ + ٢ أ ب ت$ ، ح) $س^٢ + ص^٢$ ، ط) ٢ (أ س + ب ص) .

ى) $(أ^٢ + ب^٢)^٢$ ، ك) $\frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥}$ ت ، ل) ٢ + ت ، م) $\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}$ ت .

ن) ١ ، س) $\frac{-٨\sqrt{٣}ت}{٩^٤}$

٣ − أ) { ٢ ، ٥ } ، ب) { ١ ، $\frac{٥}{٣}$ } .

جـ) { ٠ ، $-\sqrt{١٢}$ ت ، $\sqrt{١٢}$ ت } .

ى) { $\frac{-٦ - \sqrt{١٩}ت}{-٥}$ ، $\frac{-٦ + \sqrt{١٩}ت}{-٥}$ } .

هـ) { −٢ ، −١ ، ١ ، ٢ } .

٤ − أ) ٠ ، ب) ٤ − ١٨ ت ، جـ) ٢ − ٢ ت

٥ − $\bar{ع}$ = ع ⟺ ع عدد حقيقي . $\bar{ع}$ = − ع ⟺ ع عدد تخيلي بحت .

٦ − أ) المستقيم س = ٢ ، ب) المستقيم ص = ٣ ، جـ) $\emptyset$.

ى) $\emptyset$ ، هـ) دائرة الوحدة

س) المنطقة الواقعة بين الدائرتين اللتين طولا نصفي قطريهما ٣ ، ٥ ويقع مركزاهما في نقطة الأصل .

ح) داخل ومحيط الدائرة التي مركزها (١ ، ١) وطول نصف قطرها ٢ .

ط) اتحاد مجموعة نقاط نصف المستوى الواقع عن يمين محور الصادات مع مجموعة نقاط هذا المحور .

ى) النقطة الوحيدة (٣ ، ٧) .

ك) مجموعة نقاط المستقيم ص = ١ − ٢ س

٨ − أ) تركيب دوران مركزه نقطة الأصل (و) وزاويته تساوي بالقياس ٩٠° مع مغير بعد مركزه نقطة الأصل ومعامله القياسي ٢ .

ب) انسحاب « انتقال » متجهه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ ، حـ) تناظر حول محور الصادات.

أجوبة التمارين (٧ − ١)

١ − أ) $\frac{١}{\sqrt{أ}}$ ، ب) $س^{-\frac{٥}{٢}}$

٢ − أ) $٢^{س}$ ، ب) ١ ، حـ) $٥^{س}$

٣ − أ) $\frac{١}{٨}$ ، ب) ٩ ، حـ) $\frac{١}{٥}$ ، هـ) $\frac{٥}{٢}$ ، ز) $\frac{٨}{٣}$

٤ − أ) س = $\frac{٥}{٢}$ ، ب) س = $-\frac{١١}{١٢}$ ، حـ) س = - ٢

ى) س = ٧ ، هـ) س = $٦\frac{٢}{٣}$

أجوبة التمارين (٧ − ٢)

١ − أ) س = ٠,٤ ⟸ ص $\simeq$ ١,٣٥ ، ب) $٢^{٠,٦}$ $\simeq$ ١,٥٥ ،

د) $٢^{-١,٢٥} \simeq ٠,٤$

٢ – أ) من الرسم ٢,٠٩٢٥ من الحساب ٢

ب) من الرسم ٠,٤٨ من الحساب $\frac{١}{٢}$

٣ - من الرسم نجد: $\sqrt{٣} = ١,٧$ ، ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}} = ٠,٦$ ،

حـ) $٣^{-١,٥} \simeq ٠,٢$

أجوبة التمارين (٧ – ٣)

-١ أ) $لو_{٦}$ ٢١٦ = ٣ ، ب) $لو_{١١}$ ١٣٣١ = ٣ ، حـ) $لو_{ص}$ س = ٥ .

د) $لو_{٥٢}$ ٥٢ = ١ ، هـ) $لو_{١٠}$ ١٠٠ = ٢ ، و) $لو_{٣} \frac{١}{٨١} = -٤$.

ز) $لو_{٥} \frac{١}{٢٥} = -٢$ ، ح) $لو_{١٠}$ ٠,١ = -١ ، ط) $لو_{١٠}$ ٠,٠٠١ = -٣

-٢ أ) $٦٤ = ٤^{٣}$ ، ب) $١ = ١٠^{٠}$ ، حـ) $١٠٠٠ = ١٠^{٣}$.

د) $٢١٩٧ = ١٣^{٣}$ ، هـ) $٦٢٥ = ٥^{٤}$ ، و) $١ = ٦٢٥^{٠}$.

ز) $٠,٠٠١ = ١٠^{-٣}$ ، ح) ص = $س^{٥}$ ، ط) $٠,٠٠٠٠١ = ١٠^{-٥}$.

-٣ أ) ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، -٤ ، -٥

ب) ٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ ، -٢ ، -٣

حـ) ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢

٤ – أ) س = - ٢ ، ب) س = $\frac{١}{٤}$ ، حـ) س = - ٢ ،

د) س = ٤ ، هـ) س = $\frac{٢٧}{٨}$ ، و) س = $\frac{٩}{٤}$ ، ز) س = - ١

أجوبة التمارين (٧ – ٤)

١ – أ) ٢ $لو_{٧}$ ٥ ، ب) $لو_{٤}$ ٧٢ ، حـ) $لو_{س}$ $\frac{٨١}{٨}$ = ٤ $لو_{س}$ ٣ – ٣ $لو_{س}$ ٢

٣ – ٠,٦٠٢٠

٤ - $لو_{١٠}$ ٣٠ = ١,٤٧٧٢ ، $لو_{١٠}$ ٢٥ = ١,٣٩٨٠

٥ – أ) ٠,٧٧٨١ ، ب) - ٠,٠٧٩١ ، حـ) - ٠,٣٧٤٧

د) - ٠,٥٢٢٩ ، هـ) - ١,٦٩٩٠ ، و) – ٢,٢٢١٩

أجوبة التمارين (٧ – ٥)

١ – أ) الأعداد البيانية على الترتيب

٠ ، ٢ ، ٤ ، ١ $\bar{}$

٠ ، ١ ، ١ ، ٢

٤ ، $\bar{٣}$ ، $\bar{١}$ ، $\bar{٢}$ $\bar{}$

٤ ، ١ ، ١ ، $\bar{٠}$

٢ – الصواب في الفقرات ب ، حـ ، و

٣ – أ) ٦ أرقام ، ب) ٤ أرقام

٤ – أ) ب > حـ

٥ – القسم العشري لا يتغير وهو ٠,٨٣٤٢ أما الأعداد البيانية فهي :

٣ ، ٢ ، ١̄ ، ٠ ، ٢̄ ، ٤̄

أجوبة التمارين (٧ – ٦)

٤ – أ) س = ٢٧٠,٤ ، ب) س = ٥٠,١٣ ، حـ) س = ٠,١٧٥٣

ء) س = ٠,٠١٠٠٨

أجوبة التمارين (٧ – ٧)

١) ١̄,٧٤٦٣ ٢) ١,٥٣٥٣ ٣) ٢̄,٢٢٢٠

٤) ٢,٤٩٧٨ ٥) ١,١٣٤٦ ٦) ٥̄,١٠٦٥

٧) ٣,٣٠٨٤ ٨) ٣̄,٨٨١٦ ٩) ٢̄,٠٠٦٩

١٠) ١̄,٣٤٨٣ ١١) ١̄,٣٤١٢ ١٢) ١,٦٢٥٩

١٣) ٢̄,٦٢٥٩ ١٤) ٤̄,٠٥٧٥

أجوبة التمارين (٧ – ٨)

١) ١٨٢٤ ٢) ١,٤٢٢ ٣) ٢٣٨٧٠ ٤) ٢,٣٤٧

٥) ٢,١٣٥ ٦) ٠,٢٤٨٣ ٧) ١,٧٤٥ ٨) ١٠,٠٥

٩) ١٧,٦٠ ١٠) ١,١٩٨ ١١) ٢,٣٢٠ ١٢) ٢٨,٦٩

١٣) ٠,٩٨٩٧ ١٤) ٠,٤٢٥٨ ١٥) ٠,٩٢٧٤ ١٦) ٠,٠٠٧٢٠٦

حل التمارين العامة (الباب السابع)

٨ – أ) ٦٠ ، ب) ٢ س^{٦} ، حـ) $\frac{٢ أ^{٢٧}}{٩ ب^{١٢}}$ ، ء) ١ ، هـ) ٤^{٦}

٩ – أ) ١,٩٢٦٢ – ، ب) ٠,٧٥٢ ، حـ) ٢١,٤٣٨٥ –

ء) ١,٥٩٥– ، هـ) ٢,٤٨٧٤ – ، و) ٣,٩٦٥٤ –

ز) ١,٦٦٨٦– ، ح) ٢,٨٢٣٤ – ، ط) ٠,٧٢٥٠

١٠ – أ) ٠,٠٢٢١٤ ، ب) ٠,٢٩٨٦ ، حـ) ١٢٦١

ء) ٠,٥٦٠١ ، هـ) ٠,٣٠٤٦ ، و) ٦٦,٧٩

١١ – أ) ٤,٤٧٠ ، ب) ٢٩٢٩,٠٦٤ ، حـ) ٠,٢١٠٥

ء) ٥,٢٩٧ ، هـ) ١,١٣٦ ، و) ٠,٣٧١٠

ز) ٠,٢٦٠٩

١٢) حـ = ٤٩١٥٣,٥ ١٣) نق = ٣,٥٢

١٤) $\left(\frac{١}{٠,٩٨٤٣} \right)^{٣}$ ، $\sqrt[٥]{(١٢,٣١)^{٣} \text{ ، } (٢,٦٤٣)^{٤}}$

١٥) ل = ٨,٦٢٠

أجوبة التمارين (٨ – ١)

١) ١٠٥ ، ٢) ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥٠٤٠ ،

٣) في صف واحد ٧٢٠ ، على محيط دائرة ١٢٠ ، ٤) ٥٦ ،

٥) ٨ ، ٦) أ) ٦٢٥ ، ب) ١٢٠ ، ٧) أ) ١٦٨٠٧ ،

ب) ٢٥٢٠ ، ٨) ١٠٥

أجوبة التمارين (٨ – ٢)

١) أ) ٥٦ ، ب) ٣٣٦ ، حـ) ١٦٨٠ ، ء) ٦٧٢٠

هـ) ٢٠١٦٠ ، و) ٤٠٣٢٠ ، ز) ٤٠٣٢٠

٢) أجوبة التمرين السابق .

٣) ١٢٠ ، ٢٠ ، ١٢٠ ، ٥٠٤٠ ، ٨ ، ٥ ، ٣٠

٤) أ) ٦٤٨ ، ب) ٤٥٣٦

٥) أ) ٤٨ ، ب) ٩ ، حـ) ٣

٦) ١١٤ × ٣٠ × ٨ × ٣ × ٢

٧) ٧٢٠ ، ٢٤٠

٨) ٣٤٥٦٠ ، ٩) ن = ٦ ، ١٠) ن = ٦ ، ١١) ى = ٥

١٢) م = ٧ ، ن = ٣ ، ١٣) ن = ١٤

أجوبة التمارين (٨– ٣)

١) ٢٠ ، ٢١٠ ، ١٨٢ ، ١٥ ، ٨٤ .

٢) ٤٥ ، ١٢ ، ١ ، ١٠ ، ن (ن – ١)

٣) أ) ٢ ، ب) $\frac{٥}{٨}$ ، حـ) $\frac{١٣}{٨}$ ، ء) $\frac{٣٠}{١١٠}$

٤) أ) $\frac{٥}{٩}$ ، ب) $\frac{١٦}{٦}$

٥) $٢^{١٢}$ ، ٦) ٧١٥ ، ٧) ٢١٦١٢٥ ، ٨) ٦٤ طريقة

٩) ٣٣٦٠ طريق

أجوبة التمارين (٨ – ٤)

١) أ) $٢ \times ١^{٢} + ٢ \times ٢^{٢} + ٢ \times ٣^{٢} + ٢ \times ٤^{٢} + ٢ \times ٥^{٢}$

ب) $\frac{٣}{٢} + \frac{٤}{٣} + \frac{٥}{٤} + \frac{٦}{٥} + \frac{٧}{٦}$

حـ) $١ + ٢ + ٢ + \frac{٨}{٦} + \frac{١٦}{٢٤}$

٣ – أ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٢\text{ر}$ ب) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{١}{\text{ر}}$ حـ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{ر}}{٢\text{ر} + ١}$

أجوبة التمارين (٨ – ٥)

١) أ) $\text{أ}^{٦} + ٦\text{أ}^{٥}\text{ب} + ١٥\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٢} + ٢٠\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٣} + ١٥\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٤} + ٦\text{أ}\text{ب}^{٥} + \text{ب}^{٦}$

ب) $\text{س}^{٤} + ٨\text{س}^{٣}\text{ص} + ٢٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + ٣٢\text{س}\,\text{ص}^{٣} + ١٦\text{ص}^{٤}$

حـ) $\text{س}^{٥} - ٥\text{س}^{٤}\text{ص} + ١٠\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢} - ١٠\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} + ٥\text{س}\,\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٥}$

ء) $\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} - ٨$

هـ) $١ - ٤\text{س} + ٧\text{س}^{٢} - ٧\text{س}^{٣} + \frac{٣٥}{٨}\text{س}^{٤} - \frac{٧}{٤}\text{س}^{٥} + \frac{٧}{١٦}\text{س}^{٦} - \frac{١}{١٦}\text{س}^{٧} + \frac{\text{س}^{٨}}{٢٥٦}$

و) $\frac{١٢٨}{\text{س}^{٧}} - \frac{٢٢٤}{\text{س}^{٥}} + \frac{١٦٨}{\text{س}^{٣}} - \frac{٧٠}{\text{س}} + \frac{٣٥}{٢}\text{س} - \frac{٢١}{٨}\text{س}^{٣} + \frac{٧}{٣٢}\text{س}^{٥} - \frac{\text{س}^{٧}}{١٢٨}$

ز) $\frac{\text{أ}^{٦}}{\text{ب}^{٦}}$ + ٦ $\frac{\text{أ}^{٤}}{\text{ب}^{٤}}$ + ١٥ $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ + ٢٠ + ١٥ $\frac{\text{ب}}{٢}$ + ٦ $\frac{\text{ب}}{٤}$ + $\frac{\text{ب}}{\text{٦أ}^{٦}}$

٢ – أ) ٢٨ $\text{أ}^{٢}$ $\text{س}^{٦}$ ، ب) $\frac{١١٢٠}{٢٧}$ $\text{س}^{٤}$ ، حـ) ١٤٠ $\text{س}^{٤}$.

ء) -٤٠٣٢ $\text{س}^{٢}$ ، هـ) -٢٥٢ $\text{س}^{٥}$ ، و) ٣٧٨ $\text{س}^{٥}$ ، -٤٢ $\text{س}^{٤}$

٣ – أ) $٢^{ن}$ – ١ ، ب) صفر ، حـ) $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ، ء) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ ن

٤ – أ) ١,١٠ ، ب) ١,٠٣ ، حـ) ٠,٧٤ ، ء) ١,٨٠ .

هـ) ٠,٤٤ ، و) ١,٠٣ ، ز) ٠,٨٢

أجوبة التمارين العامة للباب الثامن

١) أ) ١٢٩٦ ، ب) ٢٤٠ ، ٢) ٤٢٠٠٠ ، ٣) $٥^{٧}$ = ٧٨١٢٥

٤) أ) ٢٠ ، ب) ٢٥ ، ٥) ١٤٤ ، ٦) ٢٨ قطعة مستقيمة و ٥٦ مثلثا .

٧) ١٢٦ ، ٨) ٢١٠ ، ٩) ب) ٤٢٠ طريقة ، ١٠) ١٢٦٠ .

١١) ١٢٨ $\text{س}^{١٤}$ + ٤٤٨ $\text{س}^{١٣}$ + ٦٧٢ $\text{س}^{١٢}$ + ٥٦٠ $\text{س}^{١١}$ + ٢٨٠ $\text{س}^{١٠}$ + ٨٤ $\text{س}^{٩}$ + ١٤ $\text{س}^{٨}$ + $\text{س}^{٧}$

١٣) $\frac{١٠٠١}{٣^{٩}}$ $\text{س}^{٥}$ ، ١٤) $\left[٨^{١٧}\right]$ $٢^{١٥}$ $\text{س}^{١٠}$ ، ١٥) ٠,٤٨

أجوبة التمارين (٩ – ٢)

١ – أ) ٤٤ ، ب) $\frac{٤}{٢١}$ ٤٤ ، حـ) $\frac{٧}{١٨}$ ٤٤ ، ٢) أ) ٧٩,٤ ،

ب) $\frac{٩}{١١}$ ٧٦ ، حـ) ٧٣٫٧٥ ، ٣) أ) ٤٢٫٣ ، ب) ٤٢٫٥ ،

حـ) ٤٢ ٤) أ) ٣٨٫٥ ، ب) ٤٠ ، حـ) $\frac{٤}{٢٧}$ ٤٣

٥) الوسط الحسابي = ٣٤٫٦٨ ، الوسيط = ٣٨ ، المنوال = $\frac{٩}{١٠٧}$ ٣٣

أجوبة التمارين (٩ – ٣)

٢ – { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ }

٤ – { (برتقال ، برتقال) ، (برتقال ، تفاح) ، (تفاح ، برتقال) ، (تفاح ، تفاح) }

أ١) { (برتقال ، برتقال) ، (برتقال ، تفاح) ، (تفاح ، برتقال) }

أ٢) { (برتقال ، برتقال) ، (تفاح ، تفاح) }

أ٣) { (برتقال ، برتقال) ، (برتقال ، تفاح) ، (تفاح ، برتقال) }

٥ – أ) { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ }

ب) { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } ، حـ) { ١٠ } .

ى) { ١١ ، ١٣ ، ١٥ } .

٦) { (أ ، ب) ، (أ ، حـ) ، (ب ، حـ) }

٧- أ) { (أ ، ب ، حـ) ، (أ ، ب ، ى) ، (أ ، ب ، هـ) ، (أ ، حـ ، ى)

(أ ، حـ ، هـ) ، (أ ، ى ، هـ) ، (ب ، حـ ، ى) (ب ، حـ ، هـ) ،

(ب ، ى ، هـ) ، (حـ ، ى ، هـ) }

ب) { (حـ ، ى ، هـ) }

حـ) { (أ ، حـ ، ى) ، (أ ، حـ ، هـ) ، (أ ، ى ، هـ) ، (حـ ، ى ، هـ) }

ى) { (أ ، ب ، حـ) ، (أ ، ب ، ى) ، (أ ، ب ، هـ) }

هـ) { (أ ، حـ ، ى) ، (أ ، حـ ، هـ) ، (أ ، ى ، هـ) } $\cup$

{ (ب ، حـ ، ى) ، (ب ، حـ ، هـ) ، (ب ، ى ، هـ) } $\cup$

{ (أ ، ب ، حـ) ، (أ ، ب ، ى) ، (أ ، ب ، هـ) }

أجوبة التمارين (٩ – ٤)

١– أ) $\frac{٣}{٢٠}$ ، ب) $\frac{٥}{٢٠}$ ، حـ) $\frac{٦}{٢٠}$ ، هـ) $\frac{٨}{٢٠}$ ، و) $\frac{١٢}{٢٠}$ ،
ز) $\frac{١١}{٢٠}$ ، ح) $\frac{١١}{٢٠}$ ، ط) $\frac{١٤}{٢٠}$ ، ى) $\frac{١٤}{٢٠}$

٢– أ) $\frac{١٥}{٢٠}$ ، ب) $\frac{١٤}{٢٠}$ ، ى) $\frac{١٤}{٢٠}$ ، هـ) $\frac{٩}{٢٠}$ ، و) $\frac{١١}{٢٠}$ ، ز) $\frac{٦}{٢٠}$

٣– أ) $\frac{١}{٢}$ ، ب) $\frac{٣}{٦}$ ، ى) صفر ، هـ) $\frac{٥}{٦}$ ، ز) $\frac{١}{٣}$

٤– أ) $\frac{١}{٢}$ ، ب) $\frac{١}{١٣}$ ، حـ) $\frac{١}{٤}$ ، ى) $\frac{١}{٢٦}$ ، هـ) $\frac{١}{٥٢}$

٥– أ) $\frac{٣}{٤}$ ، ب) $\frac{١}{٢}$ ، حـ) $\frac{٧}{٨}$ ، ى) $\frac{١}{٢}$

٦ – أ) $\frac{٣}{٢٠}$ ، ب) $\frac{٣}{٥}$ ، حـ) $\frac{٣}{٢٠}$ ، ء) $\frac{١٧}{٢٠}$ ، هـ) $\frac{١٧}{٢٠}$

٧ – أ) ٠٫٢١٠ ، ب) ٠٫٦٨ ، حـ) ٠٫٨٨٨ ، ء) ٠٫٩٥٦

٨ – أ) $\frac{٤٠}{١٠٠}$ ، ب) $\frac{٢٥}{١٠٠}$ ، حـ) $\frac{٣٥}{١٠٠}$ ، ء) $\frac{٥٨}{١٠٠}$ ، هـ) $\frac{٦١}{١٠٠}$ ، و) $\frac{٥١}{١٠٠}$

٩– أ) $\frac{٢٢}{١٠٠}$ ، ب) $\frac{٩}{١٠٠}$ ، حـ) $\frac{٣}{٢٥}$ ، ء) $\frac{٥٨}{١٠٠}$ ، هـ) $\frac{٩}{٥٠}$

١٠- ١

١١ – أ) $\frac{١}{١٥}$ ، ب) $\frac{٧}{١٥}$ ، حـ) $\frac{٤٢}{٩٠}$

١٢ – $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٧}$

أجوبة التمارين (٩ – ٥)

١ – أ) $\frac{٢}{١٣}$ ، ب) $\frac{٤}{١٣}$.

٢ – أ) $\frac{١}{٤}$ ، ب) $\frac{١}{٢}$ ، حـ) $\frac{١}{٢}$ ، ء) نعم

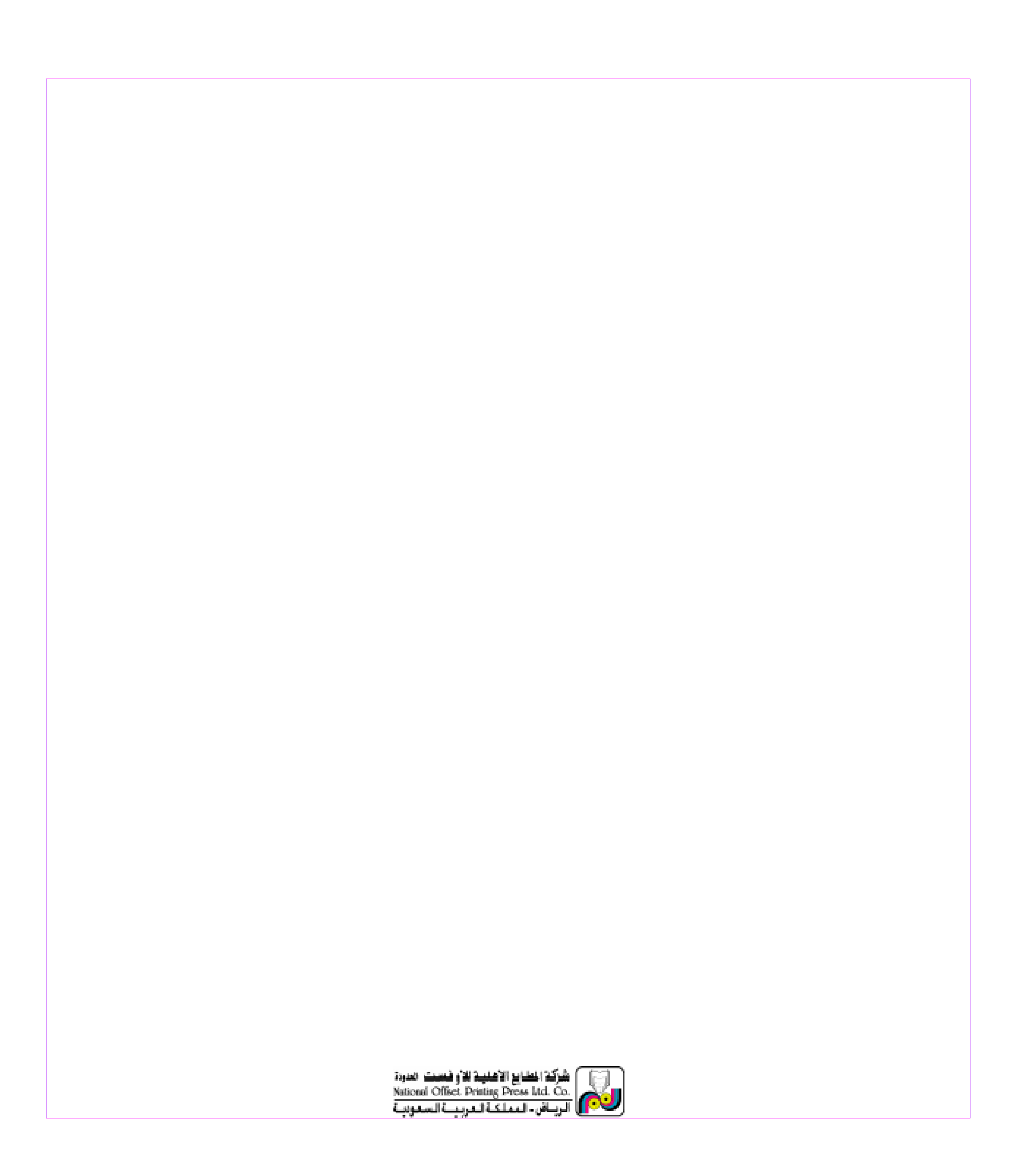
٣ – أ) $\frac{١}{١٥}$ ، ب) $\frac{٧}{١٥}$ ، حـ) $\frac{٧}{١٥}$

٤ – أ) $\frac{١}{٧}$ ، ب) ٠ ، حـ) ١ ، ء) $\frac{٦}{٧}$

٦ – أ) $\frac{١}{٨}$ ، ب) $\frac{٤}{٨}$ ، حـ) $\frac{٧}{٨}$

٧ – أ) $\frac{٢}{٧}$ ، ب) $\frac{٣}{٧}$





شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية